Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 45. Die Seilreibung. Beispiele 176-177

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Verschiebung des Supportes pro Umdrehung der Leitspindel um so größer wird, je größer der Wert $\frac{ac}{bd}$ ist. —

Die Verschiebung des Supportes ist aber gleich der Steigung der zu schneidenden Schraube und auch gleich der Steigung der Leitspindel L mal der auf eine Drehung der Drehbankspindel entfallende Drehung der Leitspindel, d. i. $\frac{L}{S}$,

mithin ist $$S = L \cdot \frac{l}{s}, \text{ also}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{ab}{cd} \cdot L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(146)}$$

175. Auf einer Drehbank mit einer Leitspindel, bei der 3 Gänge auf einen Zoll gehen, soll eine Schraube geschnitten werden, welche 5 Gänge auf einen Zoll hat. Vorhanden sind die Räder a und d mit 24 und 20 Zähnen. Welche Wechselräder sind in die Stelltasche zu geben?

Auflösung: $$\frac{S}{L} = \frac{ab}{cd} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{30}{50} = \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 5} = \frac{24}{20} \cdot \frac{5}{10}$$

Die Zähnezahlen der zu nehmenden Wechselräder sind z. B.

$$\boldsymbol{b = 30 \text{ und } c = 60}$$

oder $$\boldsymbol{b = 25 \text{ und } c = 50}$$

---

§ 45. Die Seilreibung.

An den freien Enden eines biegsamen Fadens, Fig. 150, welcher um einen festen Zylinder gelegt ist und den Bogen $\widehat{\alpha}$ umspannt, herrschen die Spannungen t und T. Soll nun unter Rücksichtnahme auf den Reibungs-

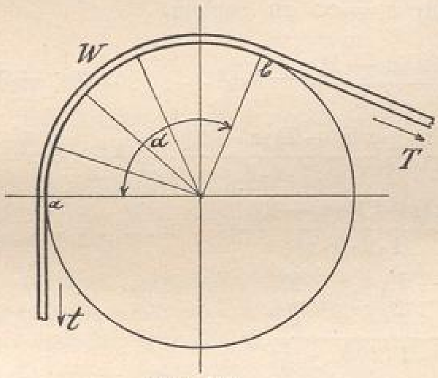

Fig. 150.

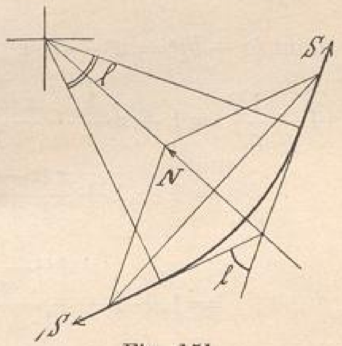

Fig. 151.

widerstand W die geringste Vermehrung von T eine Bewegung in der Richtung von T zur Folge haben, so muß gelten

$$T = t + W \quad \text{oder}$$
$$W = T - t$$

Der Reibungswiderstand ändert sich mit dem von a bis b stets wachsenden Normaldruck.

Teilt man α in unendlich viele Teile, n an der Zahl, so ist ein solcher $\gamma = \frac{\alpha}{n}$. Dadurch zerfällt der Faden in n gleich lange Teilchen, an deren Enden die Spannungen S und S' seien, Fig. 151. Die Resultierende der beiden ist der Normaldruck an der betreffenden Stelle des Zylinders. Je kleiner das betrachtete Fadenstückchen ist, desto weniger unterscheidet sich S von S', desto mehr nähert sich das Kräfteparallelogramm einem Rhombus. Dann ist

$$N = 2\,S \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = 2\,S \cdot \sin\frac{\alpha}{2\,n}$$

Da $\quad \sin\frac{\alpha}{2\,n} \sim \frac{\alpha}{2\,n}\quad$ ist, folgt

$$N = S \cdot \frac{\alpha}{n} \quad \text{und} \quad W = f \cdot S \cdot \frac{\alpha}{n}$$

$$S' = S + W = S\left(1 + f \cdot \frac{\alpha}{n}\right)$$

Im Anfangspunkte a besteht die Beziehung

$$S_1 = t\left(1 + f\frac{\alpha}{n}\right)$$

Im nächsten Fadenelemente wird entsprechend

$$S_2 = S_1\left(1 + f\frac{\alpha}{n}\right) = t\left(1 + f\frac{\alpha}{n}\right)^2$$

Weiter ist $\qquad S_3 = t\left(1 + f \cdot \frac{\alpha}{n}\right)^3$

Endlich wird $\qquad S_n = T = t\left(1 + f\frac{\alpha}{n}\right)^n$, wobei $n = \infty$ ist.

Es ist nun der Grenzwert $\left(1 + f\frac{\alpha}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ zu suchen.

Laut $(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}\,a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + b^n$ wird

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 + z \cdot \frac{1}{z} + \frac{z\,(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{z\,(z-1)\,(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{z^3} + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{z\,(z-1)}{1 \cdot 2 \cdot z^2} + \frac{z\,(z-1)\,(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{Nun} \lim_{z=\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 2 + 0{,}5 + 0{,}166 + 0{,}04166 + \ldots\ldots$$

$$\lim_{z=\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 2{,}71828\ \ldots = e$$

Für $z = \frac{n}{f\alpha}$ gesetzt, ergibt sich letzterer Wert als

$$\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \lim\left[1+\frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right]^{\frac{n}{f\alpha}} = \lim\left\{\left[1+\frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right]^n\right\}^{\frac{1}{f\alpha}} = e$$

$$\text{d. h.}\quad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{f\alpha}}\right)^n = e^{f\alpha}$$

Daher $\boldsymbol{T = t \cdot e^{f\alpha}}$ . . . . **(147)**

und $\boldsymbol{W = t \cdot (e^{f\alpha} - 1)}$ . . . . **(148)**

Die Spannung T und der Widerstand W sind unabhängig vom Zylinderhalbmesser, wachsen aber mit der Größe des umspannten Bogens.

Beispiele.

176. Die Last $G = 600$ kg soll mittels eines um einen festen Zylinder $1^1/_2$ mal geschlungenen Seils gleichförmig heruntergelassen werden. Mit welcher Kraft ist das freie Seilende zu halten, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Zylinder und Seil $f = 0{,}4$ ist?

Auflösung: $600 = T = t \cdot e^{f\alpha}$

$$t = \frac{T}{e^{f\alpha}} = \frac{600}{2{,}718^{0{,}4 \cdot 3\pi}} = \frac{600}{2{,}718^{1{,}2\pi}} = \frac{600}{43{,}2}$$

$$\boldsymbol{t = 13{,}9 \text{ kg}}$$

177. Welche Last kann mit 1 kg durch ein um einen horizontalen, festen Zylinder gelegtes Seil gehalten werden, wenn $\alpha = 1440^0$ (8π) und $f = \frac{1}{3}$ ist?

Auflösung: $T = 1 \cdot 2{,}718^{0{,}333 \cdot 8\pi} = 2{,}718^{2{,}664\pi}$

$$\boldsymbol{T \sim 4350 \text{ kg}}$$

§ 46. Die Bandbremsen.

Im § 45 wurden die Endspannungen t und T an den beiden Enden eines um einen festliegenden Zylinder gelegten Seiles so bestimmt, daß die größere Zugkraft ein gleichförmiges Hingleiten desselben über den Zylinder herbeizuführen imstande war.

Die Gleichgewichtsbedingung $T = t \cdot e^{f\alpha}$ bleibt dann auch noch bestehen, wenn das Band mit den Endspannungen festliegt und der Zylinder gegen die Spannung T hin rotiert, Fig. 152. Diese Tatsache wird praktisch bei den Bandbremsen ausgenützt, um die Abwärtsbewegung einer Last zu verlangsamen, bzw. vollständig aufzuheben.

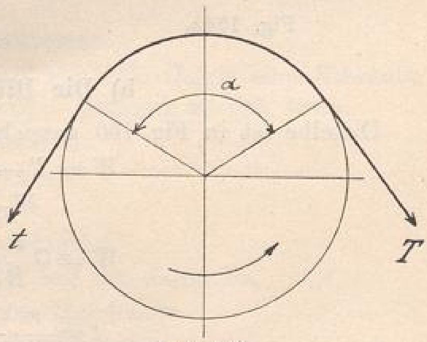

Fig. 152.