Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 49. Bewegungsgröße, Antrieb und Energie. Beispiele 189-194

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Dritter Abschnitt.

Dynamik.

§ 49. Bewegungsgröße, Antrieb und Energie.

Wirkt auf einen Körper mit der Masse M eine Kraft P ein, so erteilt sie ihm eine Beschleunigung $p = \frac{P}{M}$

Die Geschwindigkeit des Körpers ist nach t Sekunden laut § 2

$$v = p \cdot t = \frac{P}{M} \cdot t$$

Daher ergibt sich die Beziehung

$$\boldsymbol{M \cdot v = P \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(162)}$$

„Das Produkt aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit heißt die **Bewegungsgröße des Körpers**, dagegen das Produkt aus bewegender Kraft und der Zeit, welche nötig ist, um den Körper auf die Geschwindigkeit zu bringen, **Antrieb der Kraft.**"

„Die Bewegungsgröße einer mit der Geschwindigkeit v fortschreitenden Masse M ist gleich dem Antriebe jener Kraft P, welche in t Sekunden der Masse M die Geschwindigkeit v zu erteilen vermag."

In der Zeit t bewegt die Kraft P nun die Masse M einen Weg

$$s = \frac{p}{2} t^2$$

Da $p = \frac{P}{M}$ und t aus $v = p\,t$ sich mit $t = \frac{v}{p} = \frac{v \cdot M}{P}$ ergibt, folgt

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{M} \cdot \frac{v^2 \cdot M^2}{P^2} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{P \cdot s = \frac{M \cdot v^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(163)}$$

Durch die Wirkung der Kraft P auf dem Wege s ist der Masse eine Arbeit $\frac{M\,v^2}{2}$ mitgeteilt worden, welche sie verrichten kann, wenn sie infolge irgend welcher Widerstände wieder in den Zustand der Ruhe zurückkommt.

„Das Vermögen einer bewegten Masse, eine bestimmte mechanische Arbeit verrichten zu können, heißt **Arbeitsfähigkeit, Arbeitsvermögen, lebendige**

Kraft (schlechte, leider üblich gebliebene Bezeichnung, welche von Poncelet herrührt) oder **Energie.**"

Hat indes die Kraft P die Masse M von der Anfangsgeschwindigkeit c in der Zeit t Sekunden auf die Endgeschwindigkeit v gebracht, dann ist

$$s = c\,t + \frac{p}{2}t^2$$

und $p = \frac{P}{M}$, ferner aus $v = c + p\,t$

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{(v - c)\cdot M}{P}, \text{ demnach}$$

$$s = c\frac{(v - c)\,M}{P} = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{M}\cdot\frac{(v - c)^2\cdot M^2}{P^2}$$

$$P\cdot s = M\cdot c\,(v - c) + \frac{1}{2}M\,(v - c)^2$$

$$P\cdot s = M\cdot(v - c)\cdot\left(c + \frac{v}{2} - \frac{c}{2}\right) = M\,(v - c)\frac{v + c}{2}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{P\cdot s = \frac{M}{2}v^2 - \frac{M}{2}c^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \textbf{(164)}$$

„Die Arbeit, welche eine Kraft leistet, um eine Masse von der Geschwindigkeit c auf die Geschwindigkeit v zu bringen, ist gleich der Differenz der lebendigen Kräfte, welche die Masse zu Ende und zu Anfang der Bewegung besitzt."

Die Arbeit, welche die Kraft geleistet hat, ist somit als Energie in der bewegten Masse zum Vorschein gekommen.

„Man nennt daher dieses Gesetz das **Gesetz von der Erhaltung der Energie.**"

Beispiele.

189. Wie groß ist der Reibungskoeffizient f, wenn ein Körper mit dem Gewichte G kg unter Einwirkung einer Kraft P kg in t Sekunden vom Ruhezustande aus s Meter auf horizontaler Bahn zurücklegt?

Auflösung: Die treibende Kraft ist $(P - f\,G)$; daher gilt

$$M\cdot v = (P - f\,G)\cdot t$$

$$\frac{G}{g}\cdot v = (P - f\,G)\cdot t$$

$$s = \frac{o + v}{2}\cdot t = \frac{v}{2}\cdot t$$

$$v = \frac{2\,s}{t}$$

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{2\,s}{t} = (P - f\,G)\cdot t$$

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{2\,s}{t^2} = P - f\,G$$

$$\boldsymbol{f = \frac{P}{g} - \frac{2\,s}{g\,t^2}}$$

190. Ein Körper mit dem Gewichte G kg soll durch eine Kraft, die mit dem Horizonte den Winkel β bildet, fortgezogen werden. Wie groß ist dieselbe, wenn der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: Der Normaldruck des Körpers auf die Unterlage wird durch die Vertikalkomponente von P, nämlich durch $P \cdot \sin \beta$, verringert. Es ist dann

$$N = G - P \cdot \sin \beta$$

$$W = f G - f P \sin \beta$$

$$P \cdot \cos \beta = f G - f P \sin \beta$$

$$P \cdot \frac{\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi}{\cos \varphi} = G \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\boldsymbol{P = G \frac{\sin \varphi}{\cos (\beta - \varphi)}}$$

191. Welche Verzögerung erfährt ein gleitender Körper mit dem Gewichte G auf horizontaler Bahn?

Auflösung: Die verzögernde Kraft fG ist gleich der Masse des Körpers $\frac{G}{g}$ mal dessen Verzögerung b.

$$f G = b \cdot \frac{G}{g}$$

Die Verzögerung b wird daher

$$\boldsymbol{b = f g}$$

192. Ein Eisenbahnzug mit 200000 kg Gewicht soll beim Anfahren in einer Minute die Geschwindigkeit 15 m/sek erreichen. Wie groß muß die Zugkraft der Lokomotive sein, wenn $f = 0{,}005$ gesetzt werden darf?

Auflösung:
$$(P - f G) \cdot t = \frac{G}{g} \cdot v$$

$$P = f G + \frac{G \cdot v}{g \cdot t}$$

$$P = 0{,}005 \cdot 200\,000 + \frac{200\,000 \cdot 15}{9{,}81 \cdot 60}$$

$$P = 1000 + 5100$$

$$\boldsymbol{P = 6\,100 \text{ kg}}$$

193. Wie lange dauert es, bis ein auf horizontaler Strecke sich selbst überlassener Eisenbahnwagen zur Ruhe kommt, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $c = 5$ m beträgt? $f = 0{,}005$. — Welche Strecke durchläuft er noch?

Auflösung: Die verzögernde Kraft ist fG. — Es ist dann

$$f G \cdot t = M \cdot c$$

$$t = \frac{M \cdot c}{f \cdot G} = \frac{G \cdot c}{f \cdot g \cdot G} = \frac{c}{f g}$$

$$t = \frac{5}{0{,}005 \cdot 9{,}81} = \frac{1000}{9{,}81} = 102 \text{ Sek.}$$

$$\boldsymbol{t = 1 \text{ Min. } 42 \text{ Sek.}}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{0 + 5}{2} \cdot 102$$

$$\boldsymbol{s = 255 \text{ m}}$$

Mittels der Arbeitsgleichung läßt sich die Aufgabe ebenfalls recht einfach lösen. Die lebendige Kraft des Wagens wird durch die Reibung aufgezehrt.

$$\frac{M \cdot c^2}{2} = f G \cdot s$$

$$\frac{G \cdot c^2}{2g} = f G \cdot s$$

$$s = \frac{c^2}{2 f g}$$

$$s = \frac{5^2}{2 \cdot 0{,}005 \cdot 9{,}81}$$

$$\boldsymbol{s = 255 \text{ m}}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot t$$

$$t = \frac{2s}{c} = \frac{2c^2}{c \cdot 2fg}$$

$$t = \frac{c}{fg}$$

$$\boldsymbol{t = 1 \text{ Min. } 42 \text{ Sek.}}$$

194. Ein Regulierungsschieber, welcher unter einem Drucke von 3 Atm. steht, ist 75 mm breit und 450 mm lang. Wie groß ist der Widerstand gegen dessen Verschieben, wenn $f = 0{,}25$ ist?

Auflösung: Die gedrückte Fläche ist

$$7{,}5 \cdot 45 \sim 338 \text{ qcm}$$

Der Druck auf die Schieberfläche beträgt

$$P = 338 \cdot 3 \sim 1014 \text{ kg}$$

Somit ist der Widerstand gegen Verschieben des Schiebers

$$W = f \cdot P = 0{,}25 \cdot 1014$$

$$\boldsymbol{W \sim 255 \text{ kg}}$$

---

§ 50. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene ohne Rücksicht auf Reibung.

Ein Körper mit dem Gewichte G kg ist auf der schiefen Ebene in Bewegung. Fig. 161.

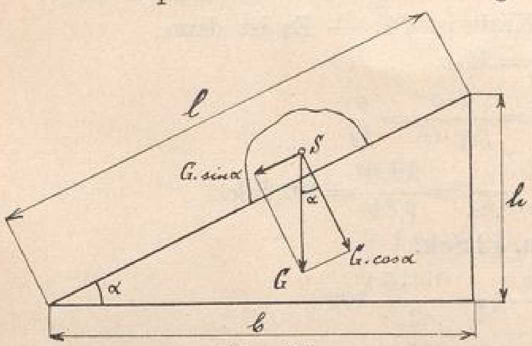

Fig. 161.

Die Komponente $G \sin \alpha$ erteilt dem Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung findet sich laut Beschleunigungsgesetz mit

$$p = \frac{P}{m} = \frac{G \cdot \sin \alpha}{\frac{G}{g}} = g \cdot \sin \alpha$$

$$\boldsymbol{p = g \cdot \sin \alpha} \quad . \; . \quad \textbf{(165)}$$