Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 50. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene ohne Rücksicht auf Reibung. Beispiele 195-196

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Mittels der Arbeitsgleichung läßt sich die Aufgabe ebenfalls recht einfach lösen. Die lebendige Kraft des Wagens wird durch die Reibung aufgezehrt.

$$\frac{M \cdot c^2}{2} = f G \cdot s$$

$$\frac{G \cdot c^2}{2g} = f G \cdot s$$

$$s = \frac{c^2}{2fg}$$

$$s = \frac{5^2}{2 \cdot 0{,}005 \cdot 9{,}81}$$

$$\boldsymbol{s = 255\ \mathrm{m}}$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot t$$

$$t = \frac{2s}{c} = \frac{2c^2}{c \cdot 2fg}$$

$$t = \frac{c}{fg}$$

$$\boldsymbol{t = 1\ \mathrm{Min.}\ 42\ \mathrm{Sek.}}$$

194. Ein Regulierungsschieber, welcher unter einem Drucke von 3 Atm. steht, ist 75 mm breit und 450 mm lang. Wie groß ist der Widerstand gegen dessen Verschieben, wenn $f = 0{,}25$ ist?

Auflösung: Die gedrückte Fläche ist

$$7{,}5 \cdot 45 \sim 338\ \mathrm{qcm}$$

Der Druck auf die Schieberfläche beträgt

$$P = 338 \cdot 3 \sim 1014\ \mathrm{kg}$$

Somit ist der Widerstand gegen Verschieben des Schiebers

$$W = f \cdot P = 0{,}25 \cdot 1014$$

$$\boldsymbol{W \sim 255\ \mathrm{kg}}$$

§ 50. Die fortschreitende Bewegung auf der schiefen Ebene ohne Rücksicht auf Reibung.

Ein Körper mit dem Gewichte G kg ist auf der schiefen Ebene in Bewegung. Fig. 161.

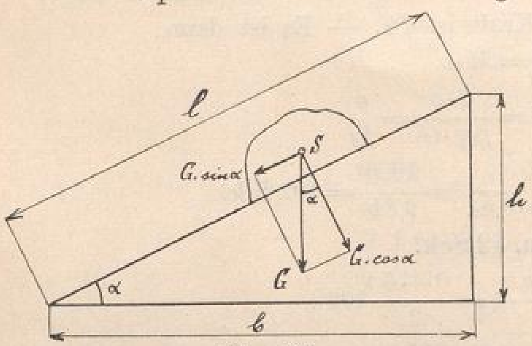

Fig. 161.

Die Komponente $G \sin \alpha$ erteilt dem Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung findet sich laut Beschleunigungsgesetz mit

$$p = \frac{P}{m} = \frac{G \cdot \sin \alpha}{\frac{G}{g}} = g \cdot \sin \alpha$$

$$\boldsymbol{p = g \cdot \sin \alpha} \quad . \quad . \quad \textbf{(165)}$$

Wäre z. B. $\alpha = 30^0$, so würde $p = 0{,}5$ g folgen.

Es werde nun gefragt, mit welcher Geschwindigkeit v der Körper unten von der schiefen Ebene anlangt. Angenommen, die Zeit für das Durchlaufen des Weges l = Länge der schiefen Ebene sei t, dann wird, da die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers oben auf der schiefen Ebene gleich Null ist,

$$v = p \cdot t = g \sin \alpha \cdot t = g \cdot \frac{h}{l} \cdot t$$

Nun ist
$$l = \frac{1}{2} p t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \frac{h}{l} \cdot t^2$$

$$t = l \sqrt{\frac{2}{gh}}$$

$$v = g \frac{h}{l} \cdot l \sqrt{\frac{2}{gh}} \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (166)$$

„Die Endgeschwindigkeit, welche ein Körper beim Herabgleiten von einer schiefen Ebene erlangt, ist so groß als die Geschwindigkeit, die er besitzt, wenn er die Höhe der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre."

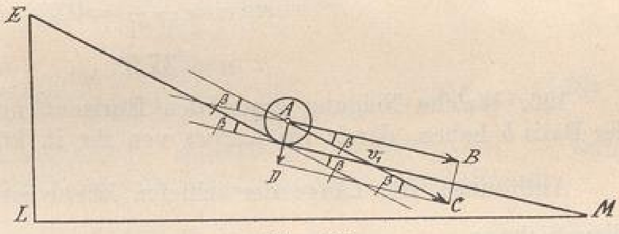

Fig. 162.

„Ob die schiefe Ebene hierbei nach einer Geraden oder Kurve gebildet ist, ist gleichgiltig."

Beweis: In A, Fig. 162, lange der Körper mit der Geschwindigkeit $\overline{AC} = v_1$ an. Nun sind

$$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin \beta = v_1 \cdot \sin \beta$$
$$\overline{AB} = v_1 \cos \beta$$

Der Geschwindigkeitsverlust in A ist daher

$$v_1 - v_1 \cos \beta = v_1 (1 - \cos \beta)$$

Derselbe ist ein Minimum, wenn $\cos \beta$ ein solches wird. Das ist für $\beta = 0$ der Fall.

Ist die schiefe Ebene aus lauter unendlich kleinen, schiefen Ebenen zusammengesetzt, d. h. nach einer stetig gekrümmten Kurve gebildet, dann trifft dies zu. Der Gesamtverlust an Geschwindigkeit ist 0, daher wie früher

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Die Dauer der Bewegung rechnet sich aus $l = \frac{p}{2} t^2$ mit, Fig. 163,

$$t = \sqrt{\frac{2l}{p}} = \sqrt{\frac{2l \cdot \overline{CD}}{g \cdot \overline{AC}}} = \sqrt{\frac{2l \cdot \overline{CD}}{gl}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \overline{CD}}{g}}$$

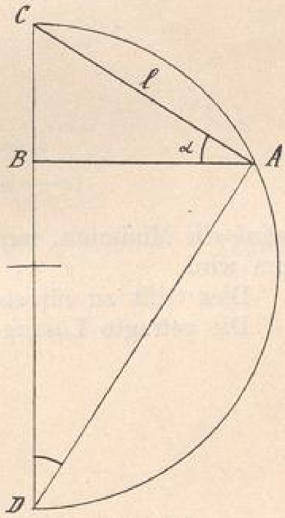

Fig. 163.

Daher ergibt sich $$\overline{CD} = \frac{g}{2} t^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(167)}$$

„Die Zeit, welche der Körper zum Herabfallen von der schiefen Ebene braucht, ist gerade so groß als würde er den Durchmesser eines Kreises frei herunterfallen, von dem die schiefe Ebene eine Sehne ist.“

„Die Höhe der schiefen Ebene und der Durchmesser des Kreises, von dem die schiefe Ebene eine Sehne ist, sind **isochrone** Wege (Wege in gleichen Zeiten).“

Beispiele.

195. Welche Neigung gegen den Horizont hat eine 12 m lange, schiefe Ebene, wenn von ihr ein Körper in 2 Sekunden heruntergleitet?

Auflösung:
$$12 = \frac{p}{2} t^2$$
$$12 = \frac{p}{2} \cdot 4$$
$$p = 6 = g \cdot \sin \alpha$$
$$\sin \alpha = \frac{6}{9{,}81} = 0{,}61$$
$$\alpha = \mathbf{37{,}5^0}$$

196. Welche Neigung gegen den Horizont muß eine schiefe Ebene mit der Basis b haben, damit ein Körper von ihr in kürzester Zeit heruntergleite?

Auflösung: Die Länge der schiefen Ebene ist $\frac{b}{\cos \alpha}$. — Es gilt nun die Weggleichung
$$\frac{b}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2b}{g}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$
$$t = \sqrt{\frac{4b}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin 2\alpha}}$$
$$t = \sqrt{\frac{4b}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$$

t wird ein Minimum, wenn der veränderlich große Nenner $\sqrt{\sin 2\alpha}$ ein Maximum wird.

Dies trifft zu für $\sin 2\alpha = 1$ oder $2\alpha = 90^0$.

Die gefragte Lösung lautet daher
$$\alpha = \mathbf{45^0}$$