Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Verschiedene Profile.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Bezeichnet man das Moment in Bezug auf die Y-Achse mit M_y, das in Bezug auf die X-Achse genommene, welches mit Hülfe von Horizontalstreifen berechnet wird, mit M_x, so hat man die Gleichungen

$$x_s = \frac{M_y}{F}, \quad y_s = \frac{M_x}{F},$$

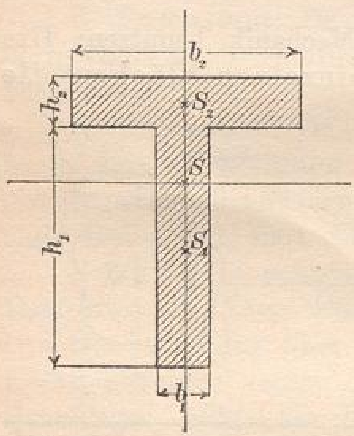
die zur Bestimmung des Schwerpunkts genügen.

Bemerkung. Verschiebt man die Y-Achse um $-e$, so geht $\sum fx$ über in $\sum f(x+e) = \sum fx + \sum fe = \sum fx + eF$, d. h. das statische Moment der Fläche wächst um eF. Davon kann man bisweilen Anwendung machen.

2) Ist der Schwerpunkt einzelner Flächentheile durch Symmetrieverhältnisse ohne weiteres bestimmt, so treten Vereinfachungen ein.

Beispiel. Für den T-Träger kann die Bestimmung folgendermafsen geschehen.

Fig. 2.



In Bezug auf die Grundlinie b_1 ist in Fig. 2 die Summe der statischen Momente der Einzelrechtecke F_1 und F_2 gleich dem Momente der Gesamtfläche F, also ist

$$h_s F = e_1 F_1 + e_2 F_2,$$

wo

$$e_1 = \frac{h_1}{2}, \; e_2 = h_1 + \frac{h_2}{2} = \frac{2h_1 + h_2}{2}$$

ist. Man erhält

$$h_s(b_1 h_1 + b_2 h_2) = \frac{h_1}{2} b_1 h_1 + \frac{2h_1 + h_2}{2} b_2 h_2,$$

so dafs

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

ist. Dafs der Schwerpunkt in der Symmetrieachse liegt, ist selbstverständlich.

3) Für das in Fig. 3 dargestellte Winkeleisen ist ebenso

$$y_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Für x_s erhält man auf entsprechendem Wege

$$x_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Findet wie in Fig. 4 Symmetrie gegen die Gerade AB statt, so braucht man nur x_s zu berechnen. Dabei ist $BS = x_s\sqrt{2}$. Ein-

Fig. 3.

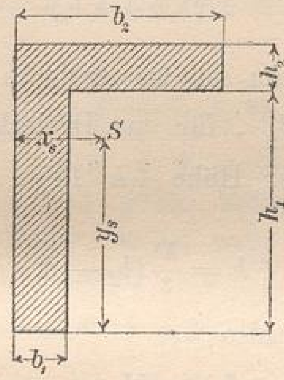
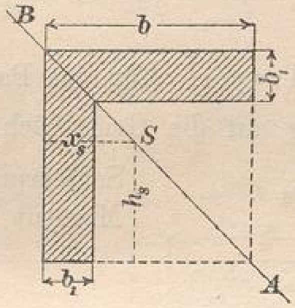


Fig. 4.



facher ergiebt sich jetzt h_s auf folgendem Wege: Es handelt sich um die Differenz zweier Quadrate, so dafs man direkt schreiben kann

$$h_s = \frac{b^3 - b_2^3}{2\,(b^2 - b_2^2)}$$

oder auch, indem man oben und unten durch $b - b_2$ dividiert,

$$h_s = \frac{b^2 + b\,b_2 + b_2^2}{2\,(b + b_2)},$$

wobei $b - b_1 = b_2$ gesetzt ist.

Fig. 5.

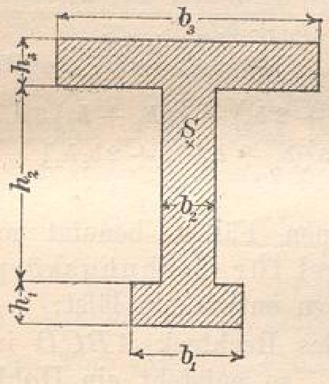
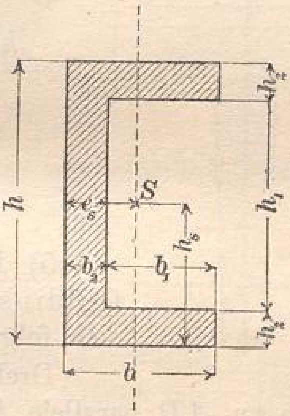


Fig. 6.



In entsprechender Weise ergiebt sich für Fig. 5 unter Benutzung der Grundlinie als Achse der Momente die Schwerpunktshöhe

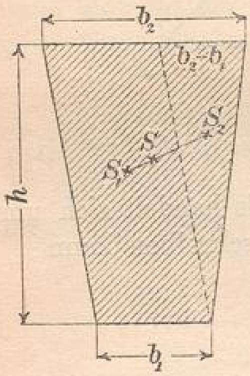
$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\,(2h_1 + h_2) + b_3 h_3\,(2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}.$$

Für das ⊏-Eisen (lies U-Eisen) wird (Fig. 6)

$$h_s = \frac{h}{2}, \quad e_s = \frac{\frac{2h_2 b^2}{2} + \frac{h_1 b_2^2}{2}}{2h_2 b + h_1 b_2} = \frac{2h_2 b^2 + h_1 b_2^2}{2(2h_2 b + h_1 b_2)}.$$

4) Trapez. Für das Parallelogramm ist das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche gleich $\frac{b_1 h^2}{2}$, für das Dreieck, dessen Schwerpunkt in der Höhe $\frac{2}{3}h$ liegt, ist das Moment

Fig. 7.



$$\frac{b_2 - b_1}{2} h \cdot \frac{2}{3} h = \frac{h^2}{3}(b_2 - b_1),$$

das Gesamtmoment also

$$\frac{3b_1 h^2 + 2h^2(b_2 - b_1)}{6} = \frac{h^2}{6}(b_1 + 2b_2).$$

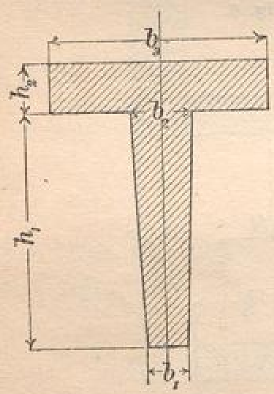
Die Schwerpunktshöhe wird daher

$$h_s = \frac{\frac{h^2}{6}(b_1 + 2b_2)}{\frac{b_1 + b_2}{2} h} = \frac{h(b_1 + 2b_1)}{3(b_1 + b_2)}.$$

Der Schwerpunkt liegt stets auf der einen Mittellinie des Trapezes, mag es symmetrisch oder unsymmetrisch sein.

Für den nebenstehenden Querschnitt wird

Fig. 8.



$$h_s = \frac{\frac{h_1^2}{6}(b_1 + 2b_2) + \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) b_3 h_2}{\frac{b_1 + b_2}{2} h_1 + b_3 h_2}$$

$$= \frac{h_1^2 (b_1 + 2b_2) + (2h_1 + h_2)\, 3 b_3 h_2}{3[(b_1 + b_2) h_1 + 2 b_3 h_2]}.$$

5) In einzelnen Fällen benutzt man die Guldinsche Regel für Drehungskörper, die sich folgendermaſsen entwickeln läſst:

Dreht man das Rechteck $ABCD$ in Fig. 9 um eine zu AD parallele Achse KL, so entsteht ein Hohlcylinder vom Inhalte

$$J = \pi\left(r^2 - r_1^2\right) h = \pi\left(r + r_1\right)\left(r - r_1\right) h = 2\pi \frac{r + r_1}{2} bh = 2\pi\varrho F,$$

wo F die Rechtecksfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.