Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

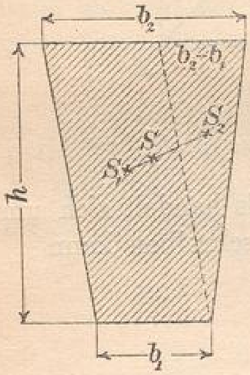
Guldinsche Regel für Drehungskörper.

Für das ⊏-Eisen (lies U-Eisen) wird (Fig. 6)

$$h_s = \frac{h}{2}, \quad e_s = \frac{\dfrac{2h_2 b^2}{2} + \dfrac{h_1 b_2^2}{2}}{2h_2 b + h_1 b_2} = \frac{2h_2 b^2 + h_1 b_2^2}{2\,(2h_2 b + h_1 b_2)}.$$

4) Trapez. Für das Parallelogramm ist das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche gleich $\frac{b_1 h^2}{2}$, für das Dreieck, dessen Schwerpunkt in der Höhe $\frac{2}{3} h$ liegt, ist das Moment

Fig. 7.



$$\frac{b_2 - b_1}{2}\, h \cdot \frac{2}{3}\, h = \frac{h^2}{3}\,(b_2 - b_1),$$

das Gesamtmoment also

$$\frac{3\,b_1 h^2 + 2h^2\,(b_2 - b_1)}{6} = \frac{h^2}{6}\,(b_1 + 2b_2).$$

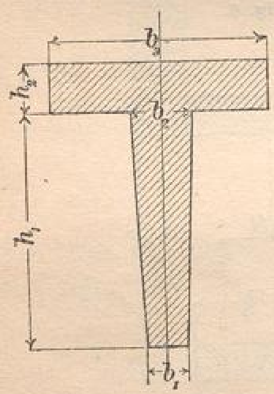
Die Schwerpunktshöhe wird daher

$$h_s = \frac{\dfrac{h^2}{6}\,(b_1 + 2b_2)}{\dfrac{b_1 + b_2}{2}\, h} = \frac{h\,(b_1 + 2b_1)}{3\,(b_1 + b_2)}.$$

Der Schwerpunkt liegt stets auf der einen Mittellinie des Trapezes, mag es symmetrisch oder unsymmetrisch sein.

Für den nebenstehenden Querschnitt wird

Fig. 8.



$$h_s = \frac{\dfrac{h_1^2}{6}\,(b_1 + 2b_2) + \left(h_1 + \dfrac{h_2}{2}\right) b_3 h_2}{\dfrac{b_1 + b_2}{2}\, h_1 + b_3 h_2}$$

$$= \frac{h_1^2\,(b_1 + 2\,b_2) + (2\,h_1 + h_2)\,3\,b_3 h_2}{3\,[(b_1 + b_2)\,h_1 + 2\,b_3 h_2]}.$$

5) In einzelnen Fällen benutzt man die Guldinsche Regel für Drehungskörper, die sich folgendermaſsen entwickeln läſst:

Dreht man das Rechteck $ABCD$ in Fig. 9 um eine zu AD parallele Achse KL, so entsteht ein Hohlcylinder vom Inhalte

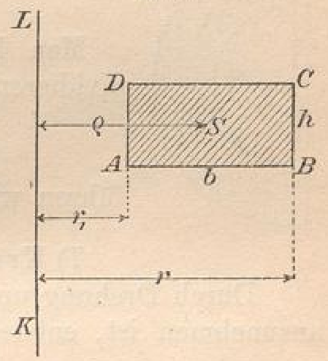
$$J = \pi\,(r^2 - r_1^2)\,h = \pi\,(r + r_1)\,(r - r_1)\,h = 2\,\pi\,\frac{r + r_1}{2}\,bh = 2\,\pi\varrho F,$$

wo F die Rechtecksfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Besteht eine Fläche aus mehreren Rechtecken von solcher Lage, deren Flächen F_1, F_2, F_3 u. s. w., deren Schwerpunktsabstände ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 u. s. w. sind, so hat der ganze Drehungskörper den Inhalt

$$J = 2\,\varrho_1 \pi F_1 + 2\,\varrho_2 \pi F_2 + 2\,\varrho_3 \pi F_3 + \cdots,$$

Fig. 9.



oder

$$J = 2\pi\,[\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots].$$

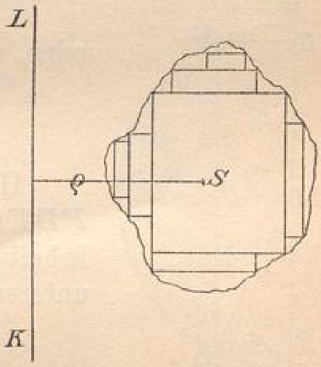
Ist nun $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ die Gesamtfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse, so ist nach dem Gesetz der statischen Momente

$$\varrho F = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots,$$

demnach ist der Inhalt des Drehungskörpers

$$J = 2\,\varrho \pi F = \text{Schwerpunktsweg mal Fläche.}$$

Fig. 10.

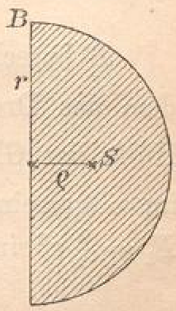


Da nun jede ebene Fläche mit Rechtecken, die man zuletzt kleiner und kleiner zu nehmen hat, mit beliebiger Genauigkeit vollständig ausgefüllt werden kann, so gilt die Formel überhaupt von jeder ebenen Fläche, die um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene rotiert. Der eigentliche Grund des Satzes beruht darin, daſs S als Punkt mittleren Abstandes von der Achse KL den mittleren Drehungsweg zurücklegt, so daſs der Körperinhalt ist: bewegte Fläche mal mittlerer Drehungsweg.

Kennt man nun den Flächeninhalt F und den Inhalt J des durch die Drehung entstehenden Körpers, so ergiebt sich der eine Schwerpunktsabstand als

$$\varrho = \frac{J}{2\pi F}.$$

Fig. 11.



6) Halbkreisfläche. Durch Drehung um AB würde eine Kugel vom Inhalte $\frac{4}{3} r^3 \pi$ entstehen, die Fläche ist: $F = \frac{r^2 \pi}{2}$, der Schwerpunktsabstand wird

$$\varrho = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{2\pi \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$