Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

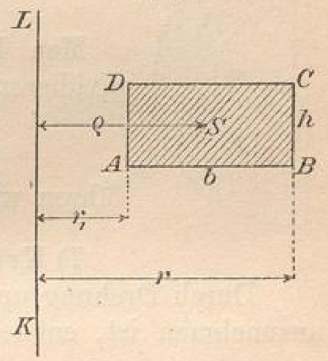
Halbkreisfläche, halber Kreisring, Kreisabschnitt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Besteht eine Fläche aus mehreren Rechtecken von solcher Lage, deren Flächen F_1, F_2, F_3 u. s. w., deren Schwerpunktsabstände ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 u. s. w. sind, so hat der ganze Drehungskörper den Inhalt

$$J = 2\varrho_1 \pi F_1 + 2\varrho_2 \pi F_2 + 2\varrho_3 \pi F_3 + \cdots,$$

Fig. 9.



oder

$$J = 2\pi\,[\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots].$$

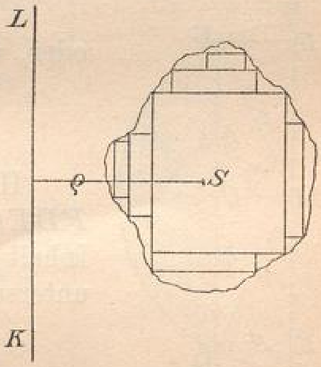
Ist nun $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ die Gesamtfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse, so ist nach dem Gesetz der statischen Momente

$$\varrho F = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots,$$

demnach ist der Inhalt des Drehungskörpers

$$J = 2\varrho\pi F = \text{Schwerpunktsweg mal Fläche.}$$

Fig. 10.

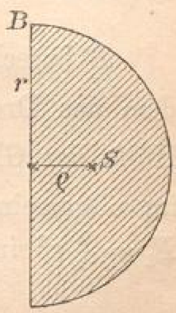


Da nun jede ebene Fläche mit Rechtecken, die man zuletzt kleiner und kleiner zu nehmen hat, mit beliebiger Genauigkeit vollständig ausgefüllt werden kann, so gilt die Formel überhaupt von jeder ebenen Fläche, die um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene rotiert. Der eigentliche Grund des Satzes beruht darin, daſs S als Punkt mittleren Abstandes von der Achse KL den mittleren Drehungsweg zurücklegt, so daſs der Körperinhalt ist: bewegte Fläche mal mittlerer Drehungsweg.

Kennt man nun den Flächeninhalt F und den Inhalt J des durch die Drehung entstehenden Körpers, so ergiebt sich der eine Schwerpunktsabstand als

$$\varrho = \frac{J}{2\pi F}.$$

Fig. 11.

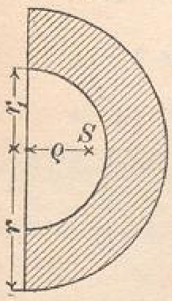


6) Halbkreisfläche. Durch Drehung um AB würde eine Kugel vom Inhalte $\frac{4}{3} r^3 \pi$ entstehen, die Fläche ist: $F = \frac{r^2 \pi}{2}$, der Schwerpunktsabstand wird

$$\varrho = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{2\pi \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Halber Kreisring. Die entsprechende Betrachtung giebt

Fig. 12.



$$\varrho = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_1^3\right)}{2\pi\,\frac{\left(r^2 - r_1^2\right)\pi}{2}} = \frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}.$$

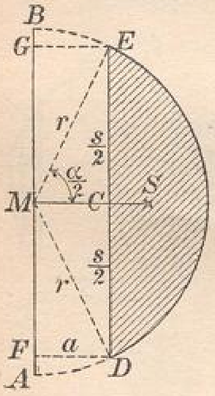
Man könnte noch oben und unten durch $r - r_1$ dividieren, was auf

$$\varrho = \frac{4\,(r^2 + r r_1 + r_1^2)}{3\pi\,(r + r_1)}$$

führen würde.

7) Kreis-Segment vom Radius r und der Sehne s. Durch Drehung um den Durchmesser AB, der zur Sehne parallel anzunehmen ist, entsteht ein Körper, dessen Inhalt gleich dem einer Kugel mit dem Radius $CD = \frac{s}{2}$ ist. Die Formel für die Kugelschicht von der Höhe s ist nämlich (Method. Lehrbuch, II, Stereom. 46)

Fig. 13.



$$J_1 = \frac{\pi s}{6}\,(3a^2 + 3b^3 + s^2),$$

oder, da hier $a = b = FD = GE$ ist,

$$J_1 = \frac{\pi s}{6}\,(6a^2 + s^2) = \pi a^2 s + \frac{\pi s^3}{6}.$$

Hiervon ist der durch Drehung des Rechtecks $FDEG$ entstehende Cylinder abzuziehen, dessen Inhalt gleich $a^2\pi s$ ist. Demnach bleibt für den zu untersuchenden Körper übrig

$$J = \frac{\pi s^3}{6}.$$

Demnach wird der Schwerpunktsabstand

$$\varrho = \frac{\frac{\pi s^3}{6}}{2\pi F} = \frac{s^3}{12F}.$$

F berechnet sich mit Hülfe des Sektors $MDE = r^2\pi\,\frac{\alpha^0}{360^0}$, von dem das Dreieck MDE abzuziehen ist. Hier bestimmt sich α mit Hülfe der Gleichung $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$. Der Inhalt des Dreiecks kann, da im allgemeinen die Trigonometrie doch nicht zu vermeiden ist, als $F_1 = \frac{1}{2}\,r^2 \sin\alpha$ angegeben werden, so dafs

$$F = r^2\pi\,\frac{\alpha}{360} - \frac{r^2}{2}\sin\alpha = \frac{r^2}{2}\left(\pi\,\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$$

einzusetzen ist. Die Schlufsformel also wird

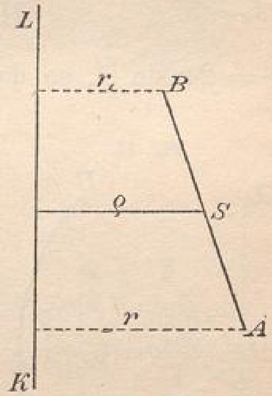
$$\varrho = \frac{s^3}{6r^2\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)},$$

wo α aus $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ zu bestimmen ist.

9) Bisweilen kann man eine Methode verwenden, bei der die Kenntnis der **Guldinschen Regel für Drehungsflächen** nöthig ist.

Man kann diese folgendermafsen entwickeln.

Fig. 14.



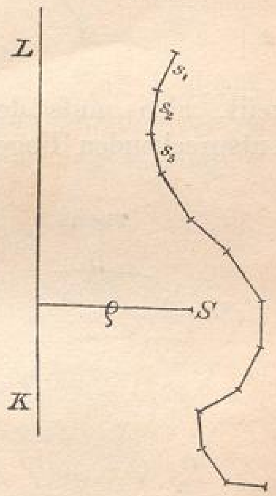
Wird die Gerade AB von der Länge s um eine Achse KL derselben Ebene gedreht, so entsteht der Kegelmantel

$$M = (r + r_1)\pi s = 2\frac{r + r_1}{2}\pi s = 2\varrho\pi s,$$

wo wiederum ϱ der Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Rotiert eine Folge von geraden Linien derselben Ebene um eine Achse dieser Ebene, sind ferner $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Längen der Geraden, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ ihre Schwerpunktsabstände von der Achse, so wird die Mantelfläche des Drehungskörpers

Fig. 15.



$$M = 2\varrho_1\pi s_1 + 2\varrho_2\pi s_2 + 2\varrho_3\pi s_3 + \cdots$$
$$= 2\pi[\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \cdots].$$

Nach dem Gesetz der statischen Momente ist aber die Klammer identisch mit ϱs, wo

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \ldots$$

die Länge des gesamten Linienzugs, ϱ sein Schwerpunktsabstand von der Achse ist, demnach ist die Mantelfläche

$M = 2\varrho\pi s =$ Schwerpunktsweg mal Länge des Linienzugs.

Handelt es sich um eine krumme Linie der Ebene, so gilt der Satz ebenfalls, denn man darf diese als eine Reihe kleiner gerader Linien betrachten.

Kennt man die Drehungsfläche F und die Bogenlänge b, so ergiebt sich für den Schwerpunkt der Achsenabstand

$$\varrho = \frac{F}{2\pi b}.$$