Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Guldinsche Regel für Drehungsflächen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

einzusetzen ist. Die Schlufsformel also wird

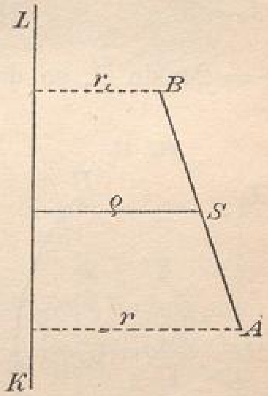
$$\varrho = \frac{s^3}{6r^2\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)},$$

wo α aus $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ zu bestimmen ist.

9) Bisweilen kann man eine Methode verwenden, bei der die Kenntnis der **Guldinschen Regel für Drehungsflächen** nöthig ist.

Man kann diese folgendermafsen entwickeln.

Fig. 14.



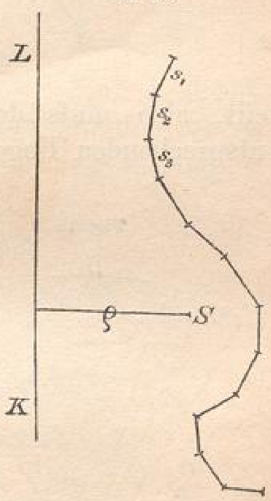
Wird die Gerade AB von der Länge s um eine Achse KL derselben Ebene gedreht, so entsteht der Kegelmantel

$$M = (r + r_1)\pi s = 2\frac{r + r_1}{2}\pi s = 2\varrho\pi s,$$

wo wiederum ϱ der Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Rotiert eine Folge von geraden Linien derselben Ebene um eine Achse dieser Ebene, sind ferner $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Längen der Geraden, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ ihre Schwerpunktsabstände von der Achse, so wird die Mantelfläche des Drehungskörpers

Fig. 15.



$$M = 2\varrho_1\pi s_1 + 2\varrho_2\pi s_2 + 2\varrho_3\pi s_3 + \cdots$$
$$= 2\pi[\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \cdots].$$

Nach dem Gesetz der statischen Momente ist aber die Klammer identisch mit ϱs, wo

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \ldots$$

die Länge des gesamten Linienzugs, ϱ sein Schwerpunktsabstand von der Achse ist, demnach ist die Mantelfläche

$$M = 2\varrho\pi s = \text{Schwerpunktsweg mal Länge des Linienzugs.}$$

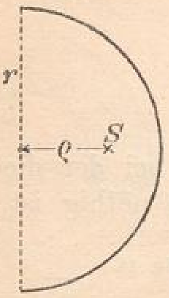
Handelt es sich um eine krumme Linie der Ebene, so gilt der Satz ebenfalls, denn man darf diese als eine Reihe kleiner gerader Linien betrachten.

Kennt man die Drehungsfläche F und die Bogenlänge b, so ergiebt sich für den Schwerpunkt der Achsenabstand

$$\varrho = \frac{F}{2\pi b}.$$

9) Für den Halbkreisbogen ist

Fig. 16.



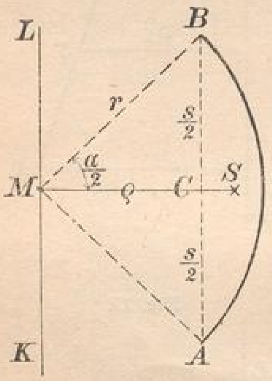
$$\varrho = \frac{4r^2\pi}{2\pi b} = \frac{4r^2\pi}{2\pi \cdot r\pi} = \frac{2r}{\pi}.$$

Für den Kreisbogen b vom Radius r, dessen Sehne sich als s berechnet, giebt die Drehung um KL eine Kugelzone von der Fläche $2r\pi s$. Demnach ist die Schwerpunktsentfernung von M aus gerechnet (Fig. 17)

$$\varrho = \frac{2\,r\pi s}{2\,\pi b} = \frac{rs}{b}.$$

Hier ist $b : r\pi = \alpha^0 : 180^0$, d. h. $\alpha = \frac{b}{r\pi}\,180^0$, und $s = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$, so dafs man schreiben kann

Fig. 17.



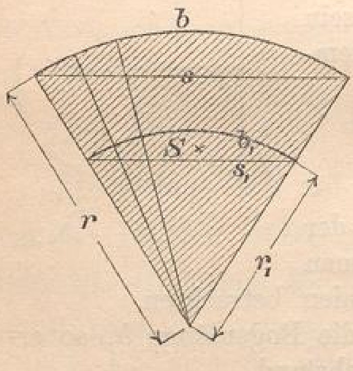
$$\varrho = \frac{2\,r^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{b},$$

wo $\alpha = \frac{b}{r\pi}\,180^0$ ist.

10) Dieses Resultat kann für Flächen benutzt werden, z. B. für den Kreissektor mit Radius r und Bogen b.

Denkt man sich diesen in zahlreiche „Dreiecke" zerlegt, deren Basis man dann als geradlinig annehmen darf, so liegen die Einzelschwerpunkte in der Entfernung $\frac{2}{3}r$ von M. Bei gleichen Teilsektoren liegen sie gleichmäfsig verteilt, also mufs der Schwerpunkt der Gesamtfläche mit dem des entsprechenden Bogens übereinstimmen. Man erhält

Fig. 18.



$$\varrho = \frac{r_1 s_1}{b_1} = \frac{\frac{2}{3}r\,\frac{2}{3}s}{\frac{2}{3}b} = \frac{2\,rs}{3\,b},$$

oder

$$\varrho = \frac{2r\,2r\sin\frac{\alpha}{2}}{3\cdot 2r\pi\frac{\alpha}{360}} = \frac{240\,r\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

Über s ist dieselbe Bemerkung zu machen, wie vorher.

Man kann das Resultat auch mit Hülfe des Kreissegments und des Dreiecks finden. Für $\alpha = 180^0$ ergiebt sich das unter 6) für den Halbkreis abgeleitete Resultat.