Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

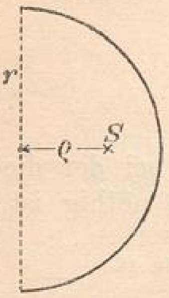
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Kreisbogen, Kreissektor, Ringsektor.

9) Für den Halbkreisbogen ist

Fig. 16.



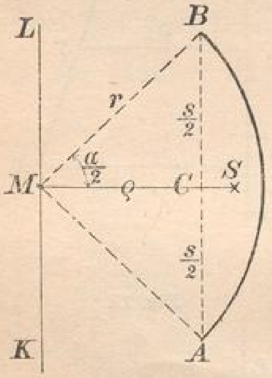
$$\varrho = \frac{4 r^2 \pi}{2 \pi b} = \frac{4 r^2 \pi}{2 \pi \cdot r \pi} = \frac{2 r}{\pi}.$$

Für den Kreisbogen b vom Radius r, dessen Sehne sich als s berechnet, giebt die Drehung um KL eine Kugelzone von der Fläche $2 r \pi s$. Demnach ist die Schwerpunktsentfernung von M aus gerechnet (Fig. 17)

$$\varrho = \frac{2 r \pi s}{2 \pi b} = \frac{r s}{b}.$$

Hier ist $b : r\pi = \alpha^0 : 180^0$, d. h. $\alpha = \frac{b}{r\pi} 180^0$, und $s = 2 r \sin \frac{\alpha}{2}$, so daſs man schreiben kann

Fig. 17.



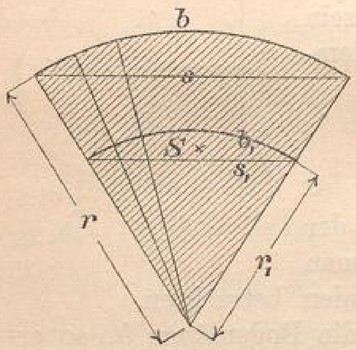
$$\varrho = \frac{2 r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{b},$$

wo $\alpha = \frac{b}{r \pi} 180^0$ ist.

10) Dieses Resultat kann für Flächen benutzt werden, z. B. für den Kreissektor mit Radius r und Bogen b.

Denkt man sich diesen in zahlreiche „Dreiecke" zerlegt, deren Basis man dann als geradlinig annehmen darf, so liegen die Einzelschwerpunkte in der Entfernung $\frac{2}{3} r$ von M. Bei gleichen Teilsektoren liegen sie gleichmäſsig verteilt, also muſs der Schwerpunkt der Gesamtfläche mit dem des entsprechenden Bogens übereinstimmen. Man erhält

Fig. 18.



$$\varrho = \frac{r_1 s_1}{b_1} = \frac{\frac{2}{3} r \frac{2}{3} s}{\frac{2}{3} b} = \frac{2 r s}{3 b},$$

oder

$$\varrho = \frac{2 r \, 2 r \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \cdot 2 r \pi \frac{\alpha}{360}} = \frac{240 \, r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha}.$$

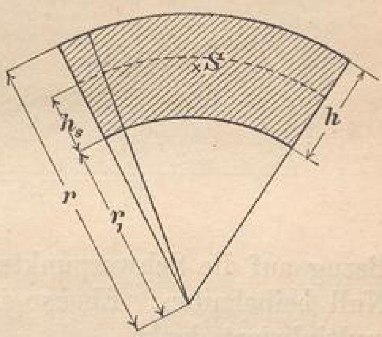
Über s ist dieselbe Bemerkung zu machen, wie vorher.

Man kann das Resultat auch mit Hülfe des Kreissegments und des Dreiecks finden. Für $\alpha = 180^0$ ergiebt sich das unter 6) für den Halbkreis abgeleitete Resultat.

11) Sektor der Ringfläche mit r, r_1, äufserem Bogen b und zugehöriger Sehne s.

Jeder Teilsektor kann als Trapez mit den Seiten $\frac{b_1}{n}$ und $\frac{b}{n}$ betrachtet werden, so dafs $h_s = \frac{h}{3}\frac{b_1 + 2b}{b_1 + b}$ ist, denn der Faktor $\frac{1}{n}$ hebt sich weg. Da aber $b_1 = b\frac{r_1}{r}$ ist, so erhält man, indem man $r - r_1$ für h setzt,

Fig. 19.



$$h_s = \frac{r - r_1}{3}\,\frac{b\frac{r_1}{r} + 2b}{b\frac{r_1}{r} + b} = \frac{r - r_1}{3}\,\frac{r_1 + 2r}{r_1 + r}.$$

Die Schwerpunkte der Teile liegen also auf einem Bogen vom Radius

$$r_3 = r_1 + h_s = \frac{3r_1(r + r_1) + (r - r_1)(r_1 + 2r)}{3(r + r_1)}$$
$$= \frac{2}{3}\,\frac{r^2 + rr_1 + r_1^2}{r + r_1},$$

mit dem wie vorher zu verfahren ist. Man kann übrigens, indem man oben und unten mit $(r - r_1)$ multipliziert, auch schreiben $\frac{2}{3}\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$. Das Resultat ist nach 9)

$$x = \frac{r_3 s_3}{b_3} = \frac{2s}{3b}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2},$$

denn es ist $\frac{s_3}{b_3} = \frac{s}{b}$.

Ebenso einfach führt folgender Weg zum Ziele. Sind S und S_1 die beiden Sektorflächen, ϱ und ϱ_1 ihre Schwerpunktsradien, so ist für die Ringfläche F und ihre Schwerpunktsentfernung x (von M aus gerechnet)

$$xF = \varrho S - \varrho_1 S_1,$$

also

$$x = \frac{\varrho S - \varrho_1 S_1}{F} = \frac{\varrho S - \varrho_1 S_1}{S - S_1}.$$

Hier ist $S_1 = S\frac{r_1^2}{r^2}$, also, da auch $\varrho : \varrho_1 = r : r_1$ ist,

$$x = \frac{\varrho S - \frac{r_1}{r}\varrho S\frac{r_1^2}{r^2}}{S - S\frac{r_1^2}{r^2}} = \frac{\varrho}{r}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{rs}{b}}{r}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2s}{3b}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 2r\sin\frac{\alpha}{2}}{3 \cdot 2r\pi\frac{\alpha}{360}}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{240\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}.$$

Für $\alpha = 180^0$ bestätigt sich das unter 6) für den halben Kreisring gefundene Resultat.

12) Verdoppelt man sämtliche Sehnen eines Kreises, die dem Durchmesser parallel sind, wobei die Symmetrie erhalten bleiben soll, so entsteht eine Ellipse. Der Schwerpunkt S der Halbkreisfläche fällt dabei mit dem der Ellipse zusammen, denn das Moment in

Fig. 20.

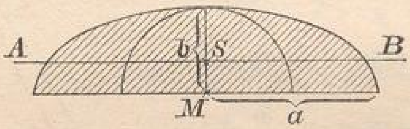
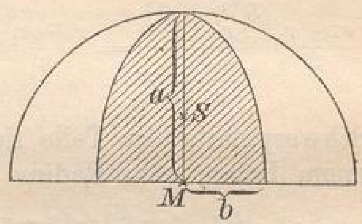


Fig. 21.

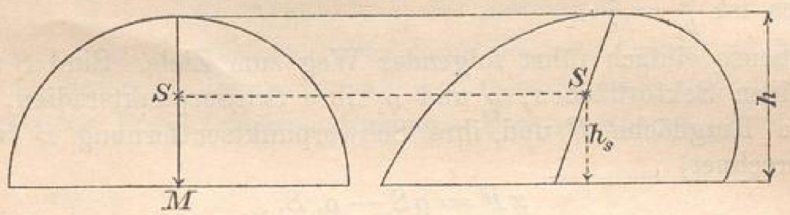


Bezug auf die Schwerpunktsachse hat bei der Verdoppelung den Wert Null beibehalten. Ebenso ist es, wenn man sämtliche Sehnen mit n multipliziert denkt.

Von der Verkürzung der Sehnen gilt dasselbe. Der Schwerpunkt liegt also im Abstande $\frac{4\,a}{3\,\pi}$ bezw. $\frac{4\,b}{3\,\pi}$ vom Durchmesser.

Dasselbe ist der Fall, wenn man die Sehnen des Halbkreises so verschiebt, daſs ihre Halbierungspunkte sich auf schräger Linie an-

Fig. 22.



ordnen. Auch dadurch entsteht eine halbe Ellipse, nur ist sie schief abgeschnitten. Ist h die senkrechte Höhe, so liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie im Abstande $h_s = \frac{4\,h}{3\,\pi}$ vom Durchmesser. — Ellipsensegmente lassen sich also stets auf Kreissegmente zurückführen.

13) Ist aus einer Fläche von einfacher Begrenzung ein Teil ausgeschnitten, so verfährt man wie im nebenstehenden Beispiele, wo ein Halbkreis aus dem Rechteck geschnitten ist. Das statische Moment der übrig bleibenden Fläche ist in Bezug auf AB

$$F h_s = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 = b h \frac{h}{2} - \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4\,r}{3\,\pi} = \frac{b h^2}{2} - \frac{2\,r^3}{3},$$

demnach ist