



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Graphische Schwerpunktbestimmungen.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

dafs die Mittellinien des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, daraus, dafs die Fläche nur einen einzigen Schwerpunkt haben kann.

m) Bewegt sich eine ebene Fläche so, dafs ihr Schwerpunkt eine beliebige ebene oder räumliche Curve beschreibt, auf der die bewegte Fläche in jedem Punkte senkrecht steht, so ist der Inhalt des körperlichen Weges gleich dem Produkte aus Fläche und Schwerpunktsweg. (Durchdringen einander dabei Teile des Körpers, so ist der Durchdringungsraum doppelt bzw. mehrfach einzurechnen.) Dieser Satz ist z. B. von Bedeutung für die Berechnung der für Eisenbahndämme nötigen Erdmassen.

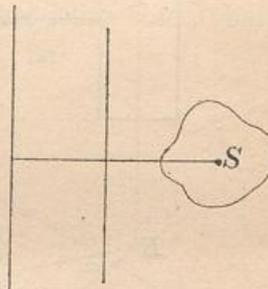
n) Bemerkung zur Guldinschen Regel. Verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um  $-e$ , so geht  $J = 2 \rho F \pi$  über in

$$J_1 = 2(\rho F + eF)\pi = J + 2eF\pi,$$

d. h. der Inhalt wächst um den eines Drehungskörpers, der entsteht, wenn die Fläche um eine Achse rotiert, die vom Schwerpunkte um  $e$  entfernt ist, oder er wächst um den Inhalt eines Cylinders, der über der Fläche steht und den Weg  $2e\pi$  zur Höhe hat.

Dadurch werden Berechnungen gewisser Art unabhängig von der Kenntnis der Schwerpunktslage gemacht.

Fig. 24.



### 15) Graphische Schwerpunktbestimmungen.

Der Graphostatik verdanken wir neuere Methoden, die es dem exakten Zeichner ermöglichen, namentlich für Trägerquerschnitte die Schwerpunkte schnell aufzufinden. Einige Beispiele sollen dies erläutern.

Symmetrischer Trägerquerschnitt. (Figur 25.)

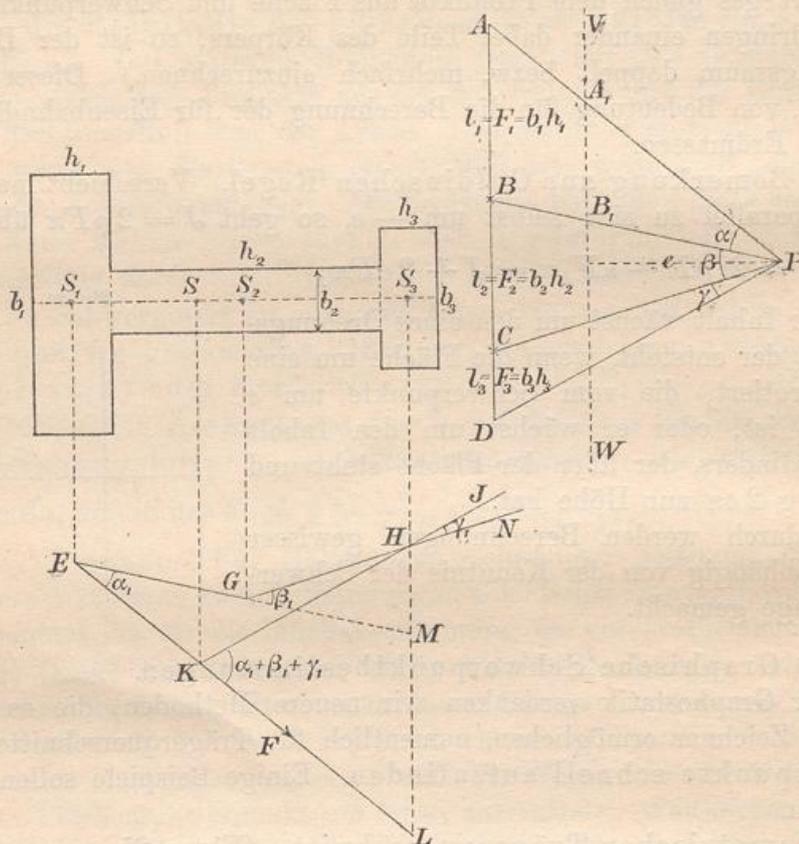
Die in  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  angreifenden „Kräfte“\*) verhalten sich wie  $b_1 h_1$ ,  $b_2 h_2$  und  $b_3 h_3$ , oder wie  $F_1 : F_2 : F_3$ . Man zeichne drei Senkrechte  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  wie in der Figur, die sich wie diese Größen verhalten. Dann nehme man einen beliebigen Punkt (Pol) an und verbinde ihn mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ .

Durch die Einzelschwerpunkte sind Senkrechte gelegt. An der zu  $S_1$  gehörigen Senkrechten beginne man irgendwo, z. B. bei  $E$ , mit folgender Konstruktion: Man ziehe  $EF \parallel AP$  und  $EG \parallel BP$  bis zur Senkrechten durch  $S_2$ , sodann  $GH \parallel CP$  bis zur Senkrechten durch  $S_3$ , zum Schluss durch  $H$  eine Parallele zu  $PD$ . Letztere giebt mit  $EF$  einen Schnitt  $K$ , und senkrecht über diesem liegt der gesuchte Schwerpunkt  $S$ .

\*) Man denke sich die Flächen homogen mit Masse belegt, so dafs man von Gewichten sprechen kann.

**Beweis.** Denkt man sich den Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $AD$  als Einheit, so würde eine durch das Strahlenbüschel  $P$  gelegte Vertikale  $VW$  Abschnitte geben, deren Längen den statischen Momenten der Kräfte  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  in Bezug auf den Punkt  $P$

Fig. 25.



oder dem statischen Momente der in  $P$  angebrachten Kräfte in Bezug auf die Punkte der Geraden  $VW$  entsprechen, denn es ist z. B.  $A_1B_1 : AB = e : 1$ , folglich, wenn  $l_1 = b_1h_1 = F$  ist,  $A_1B_1 = e \cdot AB = eF_1$ . Dieser sogenannte Kräfteplan veranschaulicht also zugleich, in welcher Weise die statischen Momente zunehmen, wenn man den Drehungspunkt des gedachten Hebels vom Angriffspunkte  $P$  der Kraft aus horizontal verschiebt.

Bei  $E$  ist davon Anwendung gemacht, denn durch die Parallelen ist  $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$  dort angetragen. Der Winkelraum  $\alpha_1$  deutet an, wie das Moment von  $F_1$  bei Verschiebung des Drehungspunktes nach rechts zunimmt.

Bei  $G$  tritt die neue Kraft  $F_2$  hinzu, deren Momentzunahme dem Winkelraume  $HGM$  entspricht, wo  $\beta_1 = \beta$  geworden ist. Bei  $H$  tritt

$F_3$  hinzu, dessen Momentzunahme durch den Winkelraum  $JHN = \gamma_1 = \gamma$  dargestellt ist.

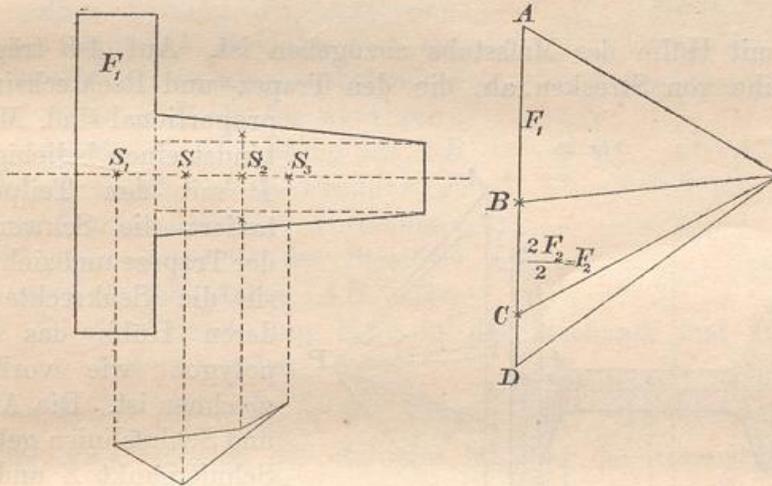
Der Winkelraum  $JKL$  mit dem Winkel  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma$  veranschaulicht demnach die Zunahme der Gesamtkraft  $F_1 + F_2 + F_3$  bei der Verschiebung nach rechts und zugleich die Abnahme bei der Verschiebung nach links. Bei  $K$  selbst aber ist der senkrechte Abstand der beiden Winkelschenkel gleich Null, also auch das Gesamtmoment gleich Null. In der durch  $K$  gelegten Senkrechten muß demnach der Schwerpunkt liegen.

Bei der praktischen Ausführung läßt man das Überflüssige weg. Man bezeichnet das Strahlenbüschel als den Kräfteplan, das Vieleck als das Kräftepolygon oder Seilpolygon.

Die folgenden Figuren wird man ohne ausführliche Erläuterung verstehen.

16) In Fig. 26 ist das Trapez in zwei Dreiecke, jedes vom Inhalte  $\frac{1}{2} F_2$  zerlegt, deren gemeinsamer Schwerpunkt  $S_2$  ist.

Fig. 26.



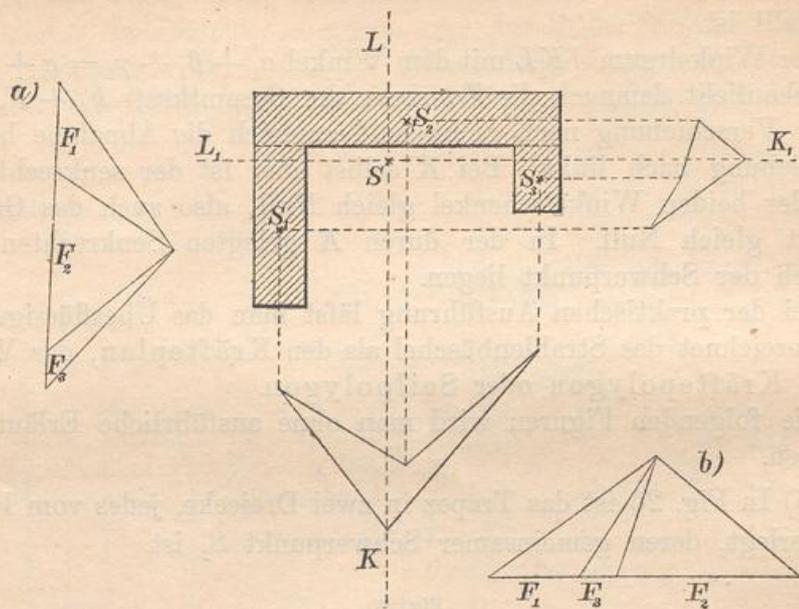
### 17) Unsymmetrischer Querschnitt.

In Figur 27 ist die Bestimmung für ein Winkeleisen durchgeführt. Hier mußte der Kräfteplan erst in der Stellung *a*) für die Vertikalen durch  $S_1, S_2, S_3$ , sodann in der Stellung *b*) für die jetzt in anderer Reihenfolge anzuordnenden Horizontalen durch  $S_1, S_3, S_2$  benutzt werden. Die gewonnenen Linien  $KL$  und  $K_1L_1$  geben durch ihren Schnitt den Schwerpunkt  $S$ .

18) Annäherungsverfahren für schwierigere Querschnitte. (Figur 28.)

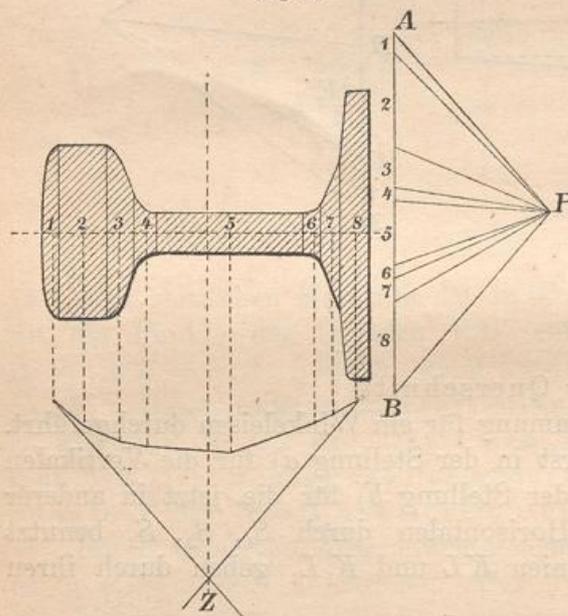
Man teile den Querschnitt in Trapeze und Rechtecke ein, deren

Fig. 27.



Inhalt mit Hilfe des Maßstabs anzugeben ist. Auf  $AB$  trägt man eine Reihe von Strecken ab, die den Trapez- und Rechtecksinhalten proportional sind. Man verbindet einen beliebigen Pol  $P$  mit den Teilpunkten, taxiert die Schwerpunkte der Trapeze und zieht durch sie die Senkrechten, mit deren Hülfe das Kräftepolygon wie vorher zu zeichnen ist. Die Anfangs- und Schlußlinien geben den Schnittpunkt  $Z$  und damit die Senkrechte, in der der Schwerpunkt liegt.

Fig. 28.



Für praktische Zwecke wird es hinreichen, den Schwerpunkt durch zwei Aufhängungen der entsprechenden Blechschablone zu ermitteln. Das hier gelehrt Verfahren wird aber dadurch nicht überflüssig, da es gelegentlich der Trägheitsmomente noch anderweitige Verwendung finden soll.