Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Veranschaulichung durch parabolisch begrenzte Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Der Körperinhalt ist $J = (bh)\frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf AB ist also $M = \left(\frac{2}{3}h\right) \cdot J = \frac{2}{3}h\frac{bh^2}{2} = \frac{bh^3}{3}$. Ebenso grofs ist das gesuchte Trägheitsmoment. Also

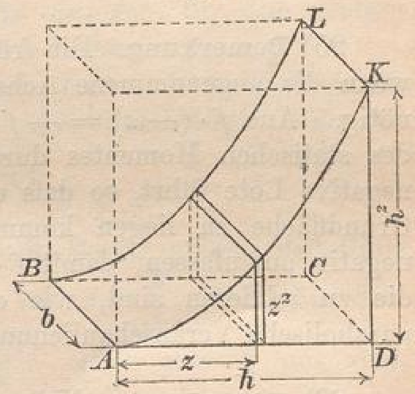
$$T = \frac{bh^3}{3}.$$

Man kann auch schreiben $T = bh \cdot \frac{h^2}{3} = F\frac{h^2}{3}$, wo F die Rechtecksfläche bedeutet.

23) Veranschaulichung des Trägheitsmomentes durch parabolisch begrenzte Körper.

Man denke sich dasselbe Rechteck, wie vorher, jedoch stehe über jedem Streifen eine Säule von der Höhe z^2. Ihr Inhalt ist fz^2, also ebenso grofs, wie das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AB. Der Inhalt dieses Körpers stimmt also überein mit dem Trägheitsmomente der Grundfläche, er mufs also nach 3) gleich $\frac{bh^3}{3}$ sein, d. h. gleich dem dritten Teile des über der Fläche stehenden Rechteckskörpers.

Fig. 32.



Man bezeichnet die Curven AK bezw. BL als Parabeln. Die gekrümmte Fläche ist die eines parabolischen Cylinders mit ADK oder BCL als Grundfläche. Man hat hier den Satz gefunden, dafs die Parabel den dritten Teil vom zugehörigen Rechteck abschneidet.

Denkt man sich in der Grundebene eine beliebige Fläche und errichtet man über ihr eine bis zur parabolischen Fläche reichende Säule, so ist der Inhalt der letzteren identisch mit dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf die Berührungslinie AB.

24) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf eine Mittellinie zu finden.

Auflösung. In Figur 33 sei $ABCD$ das Rechteck mit der als Achse angenommenen Mittellinie KL. Rechts befindet sich der parabolische Körper von der Höhe $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}$. Da $f \cdot (-z)^2 = f \cdot z^2$ ist, so hat man links denselben Körper zu errichten. Vom Rechteckskörper, dessen Inhalt $\frac{bh^3}{4}$ ist, wird nach Obigem durch die parabolische Fläche $\frac{2}{3}$ weggeschnitten, es bleibt also stehen $\frac{1}{3}\frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$. Das gesuchte Trägheitsmoment ist also $T = \frac{bh^3}{12}$.

Fig. 33.

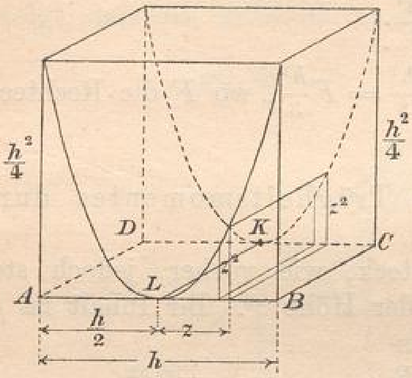
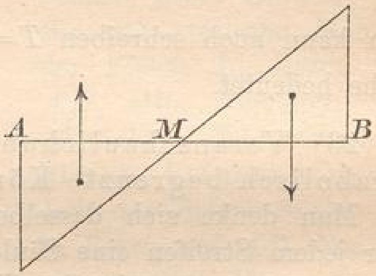


Fig. 34.



25) **Bemerkung.** Die frühere Veranschaulichungsmethode macht, wenn die angenommene Achse die Fläche schneidet, einige Vorsicht nötig. Aus $f \cdot (-z) = -f \cdot z$ folgt nämlich, dafs die Darstellung des statischen Momentes durch den abgeschrägten Körper auch auf negative Lote führt, so dafs ein Teil des Diagrammkörpers unter die Grundfläche zu liegen kommt. Dort ist dann die Schwerkraft als negativ aufzufassen, damit $f \cdot z^2$ und $f(-z) \cdot (-z)$ Momente geben, die zu addieren sind, wie es das Trägheitsmoment verlangt. Die parabolische Veranschaulichung ist daher im allgemeinen vorzuziehen.

26) **Bemerkung.** Neben $M = \sum fz$ und $T = \sum fz^2$ könnte man noch andere Momente, wie $\sum fz^3$, $\sum fz^4$ u. s. w. betrachten. Dies soll vorläufig nicht geschehen. Jedoch sei darauf aufmerksam gemacht, dafs man, je nach dem Exponenten von z, von Momenten 1^{ter}, 2^{ter}, 3^{ter} u. s. w. Ordnung sprechen kann.

27) Satz über die **Parallelverschiebung.** Ist das Trägheitsmoment einer Fläche F in Bezug auf eine Schwerpunktsachse gleich T, so ist es in Bezug auf eine parallele, um e von ihr entfernte Achse derselben Ebene $T_1 = T + e^2F$.

Beweis. Wird die Achse von AB nach A_1B_1 verschoben, so wird der Abstand z eines Parallelstreifens in $z + e$ verwandelt, und aus $f \cdot z^2$ wird $f(z+e)^2 = fz^2 + fe^2 + 2fze$. Demnach geht $T = \sum fz^2$ über in $T_1 = \sum f(z+e)^2 = \sum fz^2 + \sum fe^2 + \sum 2fze$ $= \sum fz^2 + e^2 \sum f + 2e \sum fz$. Der erste Posten ist das alte Träg-