Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

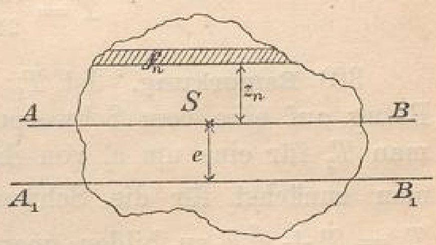
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Einfache Beispiele. Dreieck, Rechteck, Parallelogramm.

heitsmoment T, der zweite ist identisch mit e^2F, der dritte verschwindet, denn $\sum fz$ ist das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse AB, also gleich $0 \cdot F = 0$. Man hat also in der That $T_1 = T + e^2F$.

Fig. 35.



Ob man um $+e$ oder $-e$ verschiebt, ist gleichgültig, stets tritt eine Zunahme um e^2F ein.

Das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse ist demnach stets kleiner, als in Bezug auf jede zu dieser parallele Achse. Je gröfser man die Verschiebung e macht, um so gröfser wird das Trägheitsmoment.

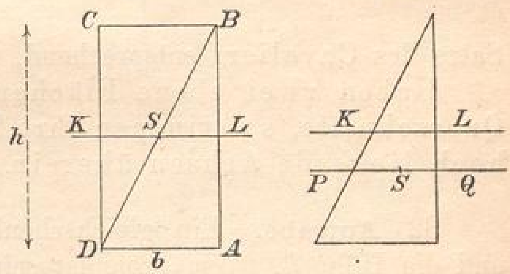
Man hat nur noch nötig, die Trägheitsmomente in Bezug auf Schwerpunktsachsen zu untersuchen, da sie sich für alle andern nach dem gefundenen Satze leicht ableiten lassen.

Auch an den beiden Diagrammkörpern läfst sich der Satz leicht beweisen. Aus ihm lassen sich Sätze über parabolisch begrenzte Körper ableiten.

28) **Beispiel.** Für das Rechteck war in Bezug auf die Mittellinie $T = \frac{bh^3}{12}$. Verschiebt man die Achse um $e = \frac{h}{2}$, so erhält man $T_1 = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}$. Dies stimmt mit dem früheren Resultate überein.

29) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten b und h in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse zu finden.

Fig. 36. Fig. 37.



Auflösung. Für das Rechteck ist in Bezug auf die Achse KL das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{12}$. Für das Dreieck ABD ist es in Bezug auf KL halb so grofs, wie man am Diagonalschnitt des Diagrammkörpers (Fig. 33) erkennt, also gleich $\frac{bh^3}{24}$. Bei der Verschiebung nach dem Schwerpunkte hin, d. h. um die Strecke $\frac{h}{6}$, vermindert sich der Werth um $e^2 F = \frac{h^2}{36} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{72}$. In Bezug auf PQ erhält man demnach

$$T = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh^3}{72} = \frac{bh^3}{36}.$$

30) **Bemerkung.** Ist T_1 das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine vom Schwerpunkte um e_1 entfernte Achse, und will man T_2 für eine um e_2 von ihm entfernte Achse bestimmen, so hat man zunächst für die Schwerpunktsachse $T = T_1 - e_1^2 F$, sodann $T_2 = T + e_2^2 F$ zu bilden, man erhält also

$$T_2 = T_1 - e_1^2 F + e_2^2 F = T_1 + \left(e_2^2 - e_1^2\right) F.$$

31) **Bemerkung.** Verschiebt man einen Parallelstreifen f parallel zur Achse, so bleibt die Entfernung z, folglich auch das Trägheitsmoment fz^2 ungeändert. Demnach haben Rechteck und Parallelogramm von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe in Bezug auf die in ihrer Richtung bleibende Mittellinie dasselbe Trägheitsmoment $\frac{bh^3}{12}$. Dasselbe gilt von der krummlinig begrenzten Fläche der Fig. 38.

Fig. 38.

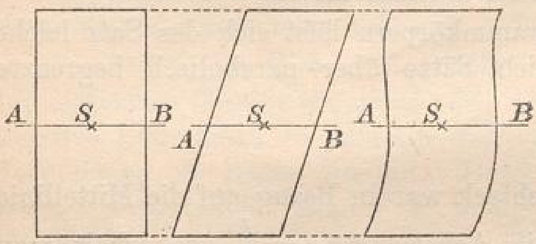
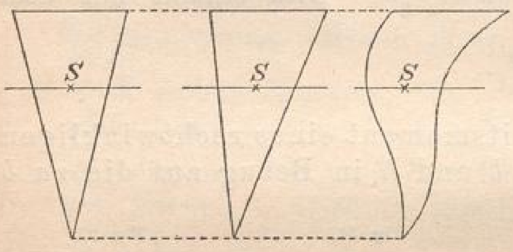


Fig. 39.



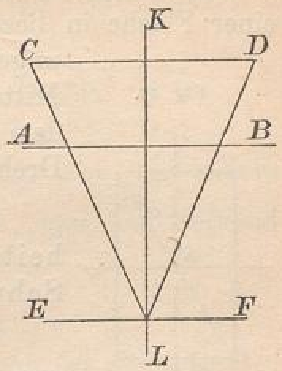
Dasselbe gilt von den in Fig. 39 dargestellten „Dreiecken“. Für die angedeutete Schwerpunktsachse haben sämtliche das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{36}$.

Überhaupt kann man, dem Satze des Cavalieri entsprechend, folgenden Satz aussprechen:

Haben zwei ebene Flächen in gleichen Höhen gleiche Querschnitte, so stimmen ihre Trägheitsmomente für gleich hoch liegende Achsen überein.

32) **Aufgabe.** Ein gleichschenkliges Dreieck habe die Basis b und die Höhe h. Wie grofs ist sein Trägheitsmoment für die Basis CD, wie grofs für die Parallele zur Basis durch die Spitze, also für EF, wie grofs für die Mittellinie KL?

Fig. 40.



Auflösung. Für CD erhält man

$$T_1 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

Für EF wird

$$T_2 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{2bh^3}{9} = \frac{bh^3}{4}.$$

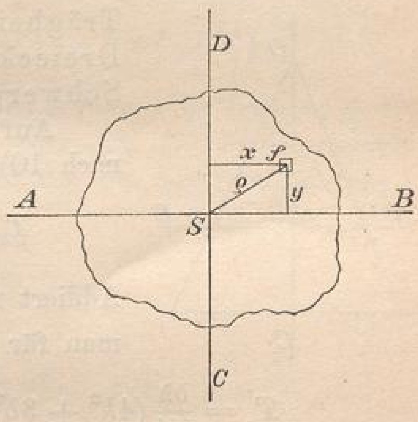
Für KL giebt Dreieck KDL (ähnlich wie bei T_1) den Wert $\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{96}$. Dreieck KLC giebt ebenso viel, also wird für das ganze Dreieck $T_3 = \frac{hb^3}{48}$.

33) Begriff des polaren Trägheitsmomentes.

Man denke sich jedes Teilchen f einer Fläche mit dem Quadrate des Abstandes ϱ von einem festen Punkte multipliziert, dann ist das Produkt $f\varrho^2$ das polare Trägheitsmoment jedes Teilchens in Bezug auf den festen Punkt. Das polare Trägheitsmoment T_p der Gesamtfläche wird also definiert durch die Gleichung

$$T_p = \sum f\varrho^2.$$

Fig. 41.



34) **Satz.** Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf einen Punkt ist gleich der Summe zweier axialen in Bezug auf Achsen, die sich in dem Punkte rechtwinklig schneiden.

Beweis. In Fig. 41 ist $\varrho^2 = x^2 + y^2$, folglich gilt für jedes Teilchen f die Gleichung $f\varrho^2 = fx^2 + fy^2$, also für die Gesamtfläche

$$\sum f\varrho^2 = \sum fx^2 + \sum fy^2 \text{ oder } T_p = T_1 + T_2.$$

35) **Bemerkung.** Auch von dem polaren Trägheitsmomente gilt der Verschiebungssatz $T_p' = T_p + e^2F$. Ist nämlich T_p das polare Moment für den Schwerpunkt, so ist dies gleich dem axialen in Bezug auf die Verschiebungslinie e als Achse, vermehrt um das Moment in Bezug auf die dazu senkrechte Schwerpunktsachse. Bei der Verschiebung ändert sich nur das letztere um e^2F.