Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Begriff des polaren Trägheitsmoments.

Auflösung. Für CD erhält man

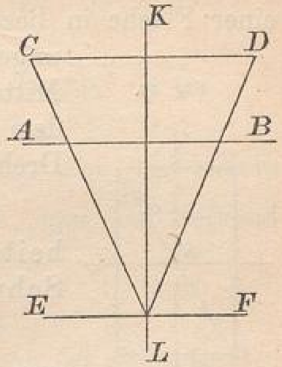
$$T_1 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

Für EF wird

$$T_2 = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{2bh^3}{9} = \frac{bh^3}{4}.$$

Für KL giebt Dreieck KDL (ähnlich wie bei T_1) den Wert $\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{96}$. Dreieck KLC giebt ebenso viel, also wird für das ganze Dreieck $T_3 = \frac{hb^3}{48}$.

Fig. 40.

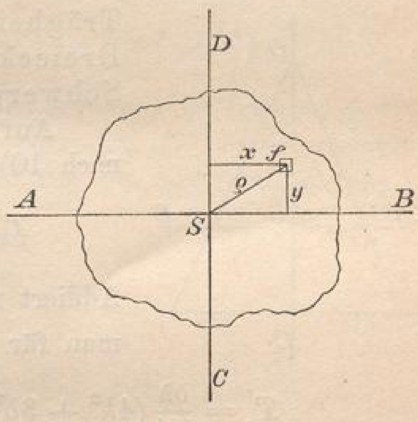


33) Begriff des polaren Trägheitsmomentes.

Man denke sich jedes Teilchen f einer Fläche mit dem Quadrate des Abstandes ϱ von einem festen Punkte multipliziert, dann ist das Produkt $f\varrho^2$ das polare Trägheitsmoment jedes Teilchens in Bezug auf den festen Punkt. Das polare Trägheitsmoment T_p der Gesamtfläche wird also definiert durch die Gleichung

$$T_p = \sum f\varrho^2.$$

Fig. 41.



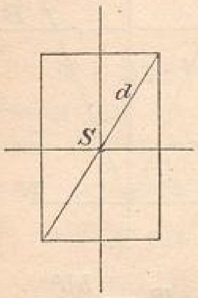
34) **Satz.** Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf einen Punkt ist gleich der Summe zweier axialen in Bezug auf Achsen, die sich in dem Punkte rechtwinklig schneiden.

Beweis. In Fig. 41 ist $\varrho^2 = x^2 + y^2$, folglich gilt für jedes Teilchen f die Gleichung $f\varrho^2 = fx^2 + fy^2$, also für die Gesamtfläche $\sum f\varrho^2 = \sum fx^2 + \sum fy^2$ oder $T_p = T_1 + T_2$.

35) **Bemerkung.** Auch von dem polaren Trägheitsmomente gilt der Verschiebungssatz $T_p' = T_p + e^2F$. Ist nämlich T_p das polare Moment für den Schwerpunkt, so ist dies gleich dem axialen in Bezug auf die Verschiebungslinie e als Achse, vermehrt um das Moment in Bezug auf die dazu senkrechte Schwerpunktsachse. Bei der Verschiebung ändert sich nur das letztere um e^2F.

36) **Bemerkung.** Die Summe der axialen Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf die Schenkel eines rechten Winkels bleibt ungeändert, wenn sich dieser in der Ebene um den Mittelpunkt dreht. Die Summe ist nämlich stets gleich dem polaren Trägheitsmomente in Bezug auf den Drehungspunkt.

Fig. 42.



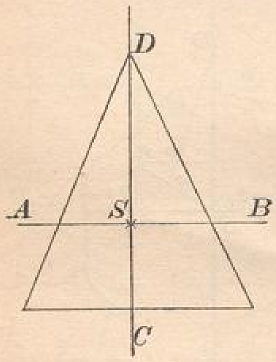
37) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf den Schwerpunkt?

Auflösung. In Bezug auf die eine Mittellinie hat man $T_1 = \frac{bh^3}{12}$, in Bezug auf die andere $T_2 = \frac{hb^3}{12}$. Demnach ist

$$T_p = T_1 + T_2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{bh}{12}d^2 = \frac{Fd^2}{12},$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Fig. 43.



38) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis b und Höhe h für den Schwerpunkt und für die Spitze?

Auflösung. Für den Schwerpunkt ist nach 10) und 13)

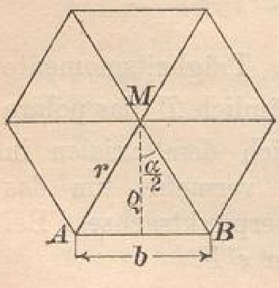
$$T_p = \frac{bh^3}{36} + \frac{hb^3}{48} = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2).$$

Addiert man dazu $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{bh}{2}$ oder $\frac{2}{9}bh^3$, so erhält man für die Spitze

$$T_p' = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) + \frac{32}{144}bh^3 = \frac{bh}{48}(12h^2 + b^2).$$

39) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment des regelmäfsigen n-Ecks mit Umfang u in Bezug auf den Schwerpunkt?

Fig. 44.



Auflösung. Für jedes Dreieck ist in Bezug auf die Spitze M nach 19)

$$T_p = \frac{b\varrho}{48}(12\varrho^2 + b^2),$$

wo

$$\varrho = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2}\cot\frac{180^0}{n} \text{ ist.}$$