Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Anwendungen auf Energie drehender Massen, physisches Pendel, excentrischen Stoss, Hydrostatik, Festigkeitslehre.

Für einen concentrischen Kreisring war

$$T_p = \left(r^4 - r_1^4\right) \frac{\pi}{2} = \left(r^2 + r_1^2\right)\left(r^2 - r_1^2\right) \frac{\pi}{2} = \frac{r^2 + r_1^2}{2} \cdot F.$$

Demnach ist für den entsprechenden scheibenförmigen Ringkörper das dynamische Trägheitsmoment gleich $m \frac{r^2 + r_1^2}{2}$.

Das mathematische Trägheitsmoment T verhält sich also zum dynamischen T' wie die Fläche F zur Masse m. Ganz allgemein folgt aus

$$T : T' = F : m,$$

dafs

$$T' = \frac{Tm}{F}.$$

44) Einige Anwendungen. In der Mechanik wird gezeigt, dafs das Trägheitsmoment bei beschleunigten Drehungsbewegungen dieselbe Rolle spielt, wie die träge Masse m bei beschleunigten geradlinigen Bewegungen. Bei den letzteren ist die Beschleunigung $g = \frac{m}{p}$, wo p die Triebkraft, m die zu bewegende Masse ist. Ebenso ist bei Drehungen die am Radius 1 zu messende Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{pr}{T'} = \frac{M}{T'},$$

wo $pr = M$ das statische Moment der Triebkraft, T' das dynamische Trägheitsmoment der zu drehenden Masse ist. Die Arbeitswucht (Energie) der geradlinig bewegten Masse ist dort $m \frac{v^2}{2}$, wo v die Geschwindigkeit bedeutet. Bei drehenden Körpern dagegen ist sie $E = T \frac{\vartheta^2}{2}$, wo ϑ die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Die Formel für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Um die Formel für das physische Pendel zu finden, hat man für l den Ausdruck $\frac{T}{M}$ einzusetzen, wo T das Trägheitsmoment, M das statische Moment des Pendels in Bezug auf die Schwerpunktsachse bedeutet. Man bezeichnet dieses l als die reduzierte Pendellänge.

Erhält ein freischwebender Körper einen excentrischen Stofs, so ist im Anfange die Bewegung identisch mit der Drehung um eine Achse, die von der Richtungslinie des Stofses die Entfernung $\frac{T}{M}$ hat. Daraus berechnet man das Mafs der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes und der drehenden nach dem Stofse.

45) Zusammenhang des axialen Trägheitsmomentes mit Problemen der Mechanik. Auch das axiale Trägheitsmoment einer Fläche kann mit dem dynamischen in die besprochenen Beziehungen gesetzt werden, nur ist dabei die Scheibe unendlich dünn zu denken, d. h. die Fläche selbst ist mit hypothetischer Massenbelegung zu versehen. Auch dann gelten die Formeln $\gamma = \frac{M}{T}$, $E = \frac{T\vartheta^2}{2}$, $l = \frac{T}{M}$. Die Drehung geschieht dabei stets um eine in der Ebene liegende Achse.

Von Bedeutung ist noch eine hydrostatische Anwendung. Die Resultante des Wasserdrucks gegen eine senkrechte Seitenwand liegt in der Tiefe $h = \frac{T}{M}$, wo T das Trägheitsmoment der Fläche, M ihr statisches Moment in Bezug auf die Schnittlinie mit der Wasseroberfläche ist. Ähnliches gilt von schrägliegenden Druckflächen.

Die wichtigste Anwendung des axialen Trägheitsmomentes ebener Flächen geschieht aber in der Festigkeitslehre. So ist z. B. die Tragfähigkeit eines Freiträgers von Länge l und von rechteckigem Querschnitt mit Grundlinie b und Höhe h

$$P = \frac{ST}{l\frac{h}{2}} = \frac{S\frac{bh^3}{12}}{l\frac{h}{2}} = \frac{Sbh^2}{6l},$$

wo S die zulässige Spannung für die Flächeneinheit bedeutet.

Die allgemeine Formel lautet

$$P = \frac{ST}{la},$$

wo a den Abstand der äufsersten Randfaser von der durch den Schwerpunkt des Querschnittes gelegten horizontalen Biegungsachse bedeutet. Den Ausdruck $\frac{T}{a}$ bezeichnet man als Widerstandsmoment W (oder auch als Querschnittsmodul Z). Es ist z. B. für das Rechteck $W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$, für den Kreis ist $W = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$, für den Kreisring $W = \frac{\frac{\pi}{64}\left(d^4 - d_1^4\right)}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi\left(d^4 - d_1^4\right)}{32d}$. Für die Strebfestigkeit ist W von entsprechender Bedeutung.

46) Zusammenhang des polaren Trägheitsmomentes mit der Festigkeitslehre.

Ist PR das eine Triebwelle verdrehende Moment, so ist die

Gleichgewichtsgleichung der Festigkeitslehre $PR = S W_p$, wo S die zulässige Schubspannung für die Flächeneinheit, W_p den Ausdruck $\frac{T_p}{a}$, das polare Widerstandsmoment, bedeutet. Für den Kreis z. B. ist

$$W_p = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16},$$

für das Quadrat

$$W_p = \frac{\frac{b^4}{6}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{6\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

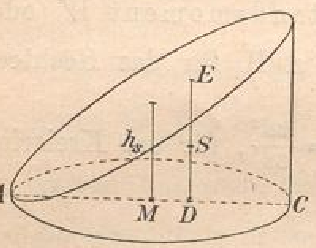
Dafs auch die Verdrehung der Welle von W_p abhängig ist, soll unten angedeutet werden.

Bemerkung. Diese Bedeutung für die Festigkeitslehre allein würde hinreichen, das Studium der betrachteten Momente als besonders wichtig erscheinen zu lassen. Sie sind aber auch unentbehrlich für gewisse mathematische Berechnungen, die wiederum für die Mechanik von Wichtigkeit sind. Auch dafür sollen einige Beispiele gegeben werden. Es wird sich besonders um abgeschrägte Säulen und um Drehungskörper handeln.

47) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Cylinderhufs zu bestimmen.

Auflösung. Ist die Schrägfläche unter 45^0 geneigt, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch A gehende Schnittlinie der beiden Ebenen gleich dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf diese Achse; d. h.

Fig. 52.



$$T = \frac{r^4\pi}{4} + (r^2) r^2\pi = \frac{5}{4} r^4 \pi.$$

Der Inhalt des Körpers aber ist gleich dem statischen Momente der Grundfläche in Bezug auf jene Achse, d. h.

$$M = (r^2\pi)\, r = r^3\pi = J.$$

Ist nun D die Projektion des Körperschwerpunktes S, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Schnittlinie zugleich $AD \cdot J$ oder $AD \cdot M$, also ist, wenn $AD = e$ gesetzt wird, $e \cdot M = T$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4} r^4 \pi}{r^3 \pi} = \frac{5}{4} r.$$