Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Schwerpunkt abgeschrägter Prismen und Cylinder.

Gleichgewichtsgleichung der Festigkeitslehre $PR = S\,W_p$, wo S die zulässige Schubspannung für die Flächeneinheit, W_p den Ausdruck $\frac{T_p}{a}$, das polare Widerstandsmoment, bedeutet. Für den Kreis z. B. ist

$$W_p = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16},$$

für das Quadrat

$$W_p = \frac{\frac{b^4}{6}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{6\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

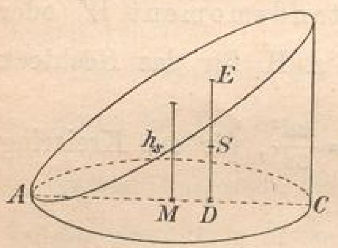
Dafs auch die Verdrehung der Welle von W_p abhängig ist, soll unten angedeutet werden.

Bemerkung. Diese Bedeutung für die Festigkeitslehre allein würde hinreichen, das Studium der betrachteten Momente als besonders wichtig erscheinen zu lassen. Sie sind aber auch unentbehrlich für gewisse mathematische Berechnungen, die wiederum für die Mechanik von Wichtigkeit sind. Auch dafür sollen einige Beispiele gegeben werden. Es wird sich besonders um abgeschrägte Säulen und um Drehungskörper handeln.

47) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Cylinderhufs zu bestimmen.

Auflösung. Ist die Schrägfläche unter 45^0 geneigt, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die durch A gehende Schnittlinie der beiden Ebenen gleich dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf diese Achse; d. h.

Fig. 52.



$$T = \frac{r^4\pi}{4} + (r^2) r^2\pi = \frac{5}{4} r^4\pi.$$

Der Inhalt des Körpers aber ist gleich dem statischen Momente der Grundfläche in Bezug auf jene Achse, d. h.

$$M = (r^2\pi)\, r = r^3\pi = J.$$

Ist nun D die Projektion des Körperschwerpunktes S, so ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Schnittlinie zugleich $AD \cdot J$ oder $AD \cdot M$, also ist, wenn $AD = e$ gesetzt wird, $e \cdot M = T$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4} r^4\pi}{r^3\pi} = \frac{5}{4} r.$$

In dieser Entfernung ist ein Lot DE zu errichten, in dessen Halbierungspunkte der Körperschwerpunkt liegt.

Ist die Schrägebene nicht unter 45^0, sondern unter einem beliebigen Winkel α geneigt, so ist der Körperinhalt $J = M \cdot \tan \alpha$, sein statisches Moment also $T \cdot \tan \alpha$. Die Entfernung AD wird

$$e = \frac{T \tan \alpha}{M \tan \alpha} = \frac{T}{M},$$

wie vorher.

48) **Folgerung.** Die Formel $e = \frac{T}{M}$ für die Entfernung der Schwerpunktsprojektion gilt in derselben Weise für jeden abgeschrägten Körper. Für regelmäfsige und symmetrische Grundflächen ist so der Schwerpunkt des abgeschrägten Körpers leicht zu bestimmen. Bei beliebig gestalteten Flächen mufs für die Lage von D noch eine zweite Koordinate bestimmt werden, was mit Hülfe der später zu besprechenden Centrifugalmomente geschieht.

Aber nicht nur für abgeschrägte Körper gilt diese Bestimmung, sondern, wie gezeigt werden soll, mit entsprechender Änderung auch für Sektoren von Drehungskörpern.

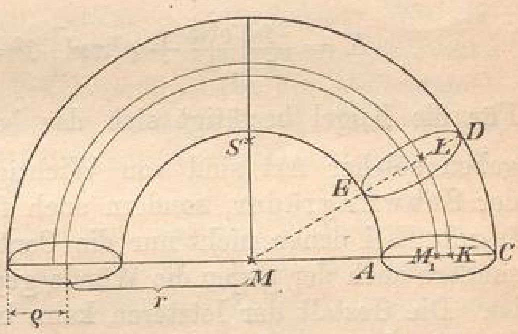
49) **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des in Figur 53 dargestellten halben Drehungskörpers mit kreisförmigem Querschnitt?

Auflösung. Jeder kleine Sektor $ACDE$ läfst sich als abgeschrägter Cylinder betrachten. Sind r und ϱ die Radien, so hat die Schwerlinie KL eine Entfernung e von M, die sich aus

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{\varrho^4 \pi}{4} + \varrho^2 \pi \cdot r^2}{\varrho^2 \pi \cdot r}$$

$$= \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r}$$

Fig. 53.



berechnet. Auf dem mit diesem Radius e um M geschlagenen Kreise liegen die Schwerpunkte der sämtlichen kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt des Körpers fällt also mit dem dieses Halbkreisbogens zusammen. Demnach ist (vgl. Nr. 9)

$$MS = \frac{2e}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{T}{M} = \frac{2}{\pi} \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{2r\pi}.$$