Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Schwerpunkt des Meridianskeils der Kugel.

Wichtiger ist das allgemeine Resultat, dafs für halbe Rotationskörper von beliebigem Hauptschnitt

$$MS = \frac{2}{\pi}\frac{T}{M}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum ist.

In diesem Punkte ist die Masse des halben Rotationskörpers vereinigt zu denken, wenn man berechnen will, durch welche Centrifugalkraft die eine Hälfte des ganzen Körpers von der andern abgerissen werden soll, sobald er schnell um seine Hauptachse dreht.

Ist ϑ die am Einheitskreise gemessene Winkelgeschwindigkeit, so ist diese Centrifugalkraft

$$K = m \cdot \overline{MS} \cdot \vartheta^2 = m \frac{2}{\pi}\frac{T}{M}\vartheta^2.$$

Hier ist $m = \frac{p}{g} = \frac{J \cdot p'}{g}$, wenn J der Inhalt, p' das specifische Gewicht des halben Körpers ist. Nun ist aber nach Guldin $J = \frac{2r\pi \cdot F}{2}$ und das Moment $M = F \cdot r$, also ist

$$K = \frac{r\pi F p'}{g}\frac{2}{\pi}\frac{T}{Fr}\vartheta^2 = 2\frac{p'}{g}T\vartheta^2.$$

Zur Kenntnis der Beanspruchung eines beliebig gestalteten Schwungringes durch die Centrifugalkraft reicht also die Kenntnis des Trägheitsmomentes der erzeugenden Fläche, der Winkelgeschwindigkeit und des spezifischen Gewichtes p' aus.

Der vorher behandelte Körper mit kreisförmigem Querschnitt wird also beansprucht durch

$$K = \frac{2p'}{g}\left[\frac{\varrho^4\pi}{4} + \varrho^2\pi r^2\right]\vartheta^2 = \frac{\varrho^2\pi p'}{2g}(\varrho^2 + 4r^2)\vartheta^2.$$

Für die Kugel bestätigt sich das bekannte Resultat $\frac{p}{g}\frac{r^4\pi\vartheta^2}{4}$. Aufgaben solcher Art sind von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie der Schwungräder, sondern auch für die der sogenannten Centrifugen, bei denen nicht nur die Centrifugalkraft des halben Gefäfses, sondern auch der gegen die Wände geprefsten Flüssigkeit zu berechnen ist. Die Gestalt der letzteren kann bei grofsen Geschwindigkeiten als Rotationskörper eines Kreissegmentes betrachtet werden, wenn das Gefäfs kugelförmig begrenzt ist.

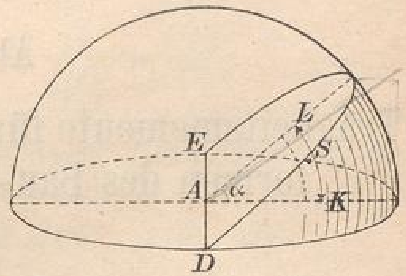
50) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines Meridiankeils der Kugel zu bestimmen.

Auflösung. In Bezug auf DE ist das statische Moment der

Halbkreisfläche $M = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3$, das Trägheitsmoment ist $T = \frac{r^4 \pi}{8}$, folglich

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{r^4 \pi}{8}}{\frac{2}{3} r^3} = \frac{3\pi}{16} r.$$

Fig. 54.



Mit diesem Radius e ist ein Kreisbogen KL zu schlagen, dessen Schwerpunkt mit dem des Körpers übereinstimmt. Die Schwerpunktsentfernung AS wird $\frac{e \cdot s}{\widehat{b}}$, wo s die Sehne KL, $\widehat{b}$ den Bogen KL bedeutet. Ist nun der Keilwinkel gleich α^0, so ist $\widehat{b} = e\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$, dagegen die Sehne $s = 2e \sin \frac{\alpha}{2}$, also

$$AS = \frac{e \cdot 2e \sin \frac{\alpha}{2}}{e\pi \frac{\alpha^0}{180^0}} = \frac{360\, e \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha} = \frac{360 \cdot 3\pi r \sin \frac{\alpha}{2}}{16 \pi \alpha}$$

oder

$$AS = \frac{135}{2} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

Ist z. B. $\alpha = 180^0$, so wird $AS = \frac{135}{2} \cdot \frac{r}{180^0} = \frac{3}{8} r$, was mit der bekannten Entfernung des Halbkugelschwerpunktes übereinstimmt.

An diesen Beispielen wird man erkennen, von welcher Wichtigkeit es ist, von beliebig gestalteten ebenen Flächen die statischen Momente, die axialen und polaren Trägheitsmomente, die Widerstandsmomente und die Schwerpunktslagen zu bestimmen. In Nachstehendem sind zunächst einige der wichtigeren Querschnittsformen der Technik in diesem Sinne behandelt.

Auf jeden dieser Querschnitte läſst sich ein parabolisch begrenzter Diagrammkörper nach Art der Figuren 32, 33, 47 und 48 aufsetzen, dessen Inhalt gleich dem axialen oder polaren Trägheitsmomente ist. Seine korrekte Konstruktion bietet eine vortreffliche Übung des räumlichen Vorstellungsvermögens. In der Abhandlung des Herrn Bantlin, die in den Vorbemerkungen genannt ist, findet man eine lehrreiche Sammlung solcher Zeichnungen.
