



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

A. Die Momente.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Abschnitt III.

Trägheitsmomente für die wichtigeren Querschnittsformen des Bau- und Maschinenwesens.*)

A. Die Momente.

51) Rechtecksquerschnitt.

$$T_1 = \frac{bh^3}{12}, \quad T_2 = \frac{hb^3}{12}, \quad T_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$$

oder

$$T_p = \frac{F}{12} d^2,$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Widerstandsmoment:

$$W_1 = \frac{T_1}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_2 = \frac{T_2}{\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{hb^2}{6}.$$

Sonderfall des Quadrates:

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4}{12}, \quad T_p = \frac{b^4}{6}, \quad W_1 = W_2 = \frac{b^3}{6}.$$

Fig. 55.



Fig. 56.

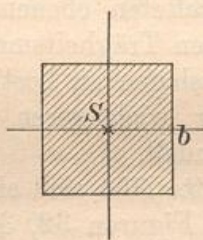
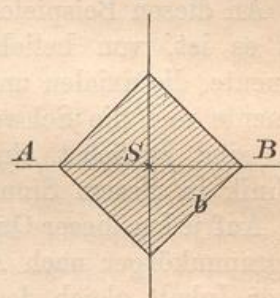


Fig. 57.



Quadrat in diagonaler Stellung. Figur 57.

Jedes der Dreiecke mit Basis $AB = b\sqrt{2}$ hat die Höhe $b\sqrt{\frac{1}{2}}$, nach Nr. 32 ist also für jedes in Bezug auf die Basis

*) In dieser Zusammenstellung werden einige schon behandelte Grundformen noch einmal dargestellt, damit nicht scheinbare Lücken entstehen.

$$T = \frac{b\sqrt{2}\left(b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3}{12} = \frac{b^4}{24},$$

für das Quadrat also

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4}{12}, \quad W_1 = W_2 = \frac{\frac{b^4}{12}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}.$$

52) Rechteckige Gurtungen, die durch Fachwerk verbunden und als ein einziger Körper zu betrachten sind.

$$T_1 = \frac{b}{12} (h^3 - h_1^3), \quad W_1 = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{6h}.$$

Die andern Größen kommen hier nicht in Betracht.

Fig. 58.

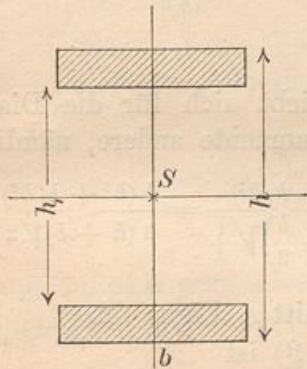
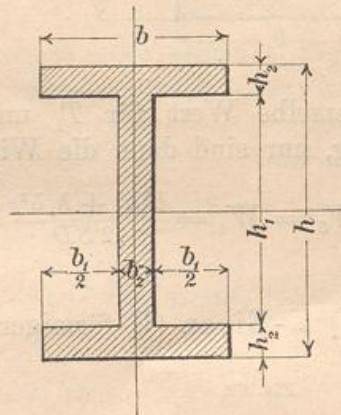


Fig. 59.



53) Γ -Träger (Doppel-T-Querschnitt). Figur 59.

$$T_1 = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}, \quad T_2 = \frac{h_1b_2^3 + 2h_2b^3}{12}.$$

T_2 kommt in Frage, wenn der Träger als Strebe benutzt wird.

$$W_1 = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}, \quad W_2 = \frac{h_1b_2^3 + 2h_2b^3}{6b}.$$

54) Gurtungen mit \mathbf{T} -Querschnitt. Figur 60.

$$T = \frac{bh^3 - b_1h_1^3 - b_2h_2^3}{12},$$

$$W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3 - b_2h_2^3}{6h}.$$

Die andern Größen kommen hier nicht in Betracht.

55) $+$ -Eisen (Kreuz-Querschnitt). Figur 61.

$$T_1 = T_2 = \frac{bh^3 + b_1b^3}{12} = \frac{b(h^3 + b_1b^2)}{12}, \quad T_p = \frac{b(h^3 + b_1b^2)}{6}$$

$$W_1 = W_2 = \frac{b(h^3 + b_1b^2)}{6h}$$

Fig. 60.

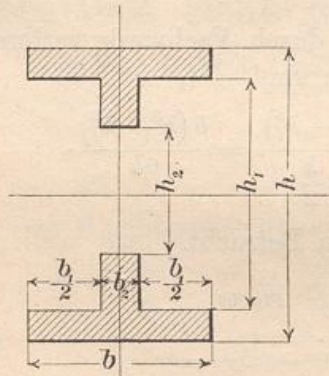
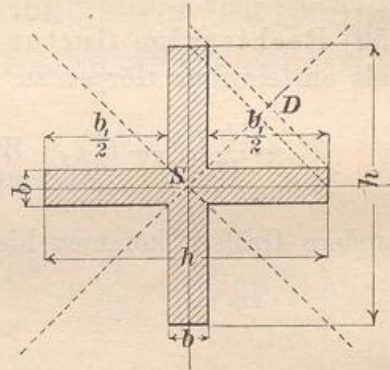


Fig. 61.



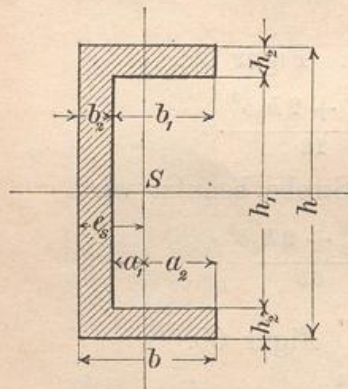
Derselbe Wert für T_1 und T_2 ergibt sich für die Diagonalstellung, nur sind dann die Widerstandsmomente andere, nämlich

$$W_3 = W_4 = \frac{b(h^3 + h_1b^2)}{12SD} = \frac{b(h^3 + h_1b^2)}{12\left(\frac{h}{2} + \frac{b}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b(h^3 + h_1b^2)}{3(h+b)\sqrt{2}}$$

56) \square -Eisen (U-förmiger Querschnitt). Figur 62.

Nach Nr. 3) ist

Fig. 62.



$$e_s = \frac{2h_2b^2 + h_1b_1^2}{2(2h_2b + h_1b_1)}$$

Die beiden Momente werden

$$T_1 = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12},$$

$$T_2 = \frac{1}{3}[he_s^3 - h_1a_1^3 - 2h_2a_2^3].$$

Die leicht zu bildenden Widerstandsmomente sollen von jetzt ab nicht mehr angegeben werden.

57) \top -Träger (einfacher T-Querschnitt). Figur 63.

Nach Nr. 2) ist

$$h_s = \frac{b_1h_1^2 + b_2h_2(2h_1 + h_2)}{2(b_1h_1 + b_2h_2)}$$

Die Momente werden

$$T_1 = \frac{1}{3} [b_1 h_s^3 + b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3], \quad T_2 = \frac{h_1 b_1^3 + h_4 b_2^3}{12}$$

Fig. 63.

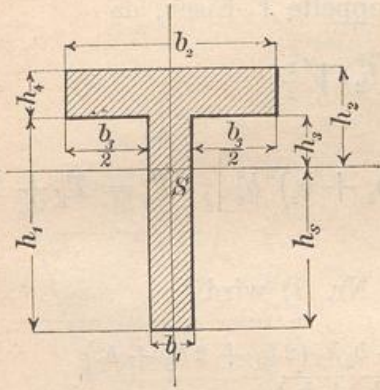
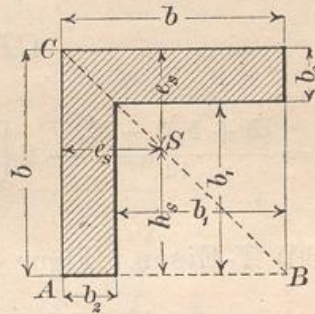


Fig. 64.



58) Γ -Eisen (gleichschenkliges Winkeleisen). Fig. 64.

Es handelt sich um die Differenz zweier Quadrate, so dass nach Nr. 3)

$$h_s = \frac{b^3 - b_1^3}{2(b^2 - b_1^2)}, \quad e_s = b - h_s.$$

In Bezug auf AB wird $T = \frac{b^4 - b_1^4}{3}$, also in Bezug auf beide Schwerpunktsachsen

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4 - b_1^4}{3} - h_s^2 (b^2 - b_1^2).$$

59) Diagonalstellung des Γ -Eisens. Figur 65.

Vom Quadrat $AEBD$ sind drei Quadrate abzuziehen, wenn man das doppelt gezeichnete Winkeleisen erhalten will. In Bezug auf AB ist also

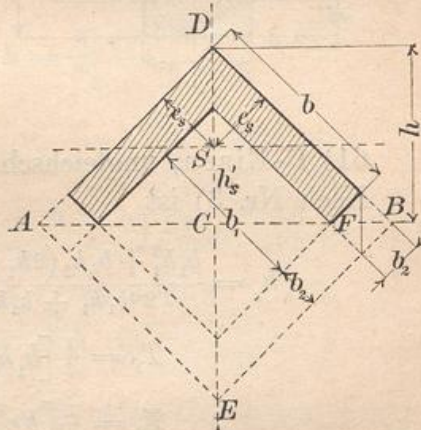
$$T = \frac{(b + b_2)^4}{12} - \frac{b_1^4}{12} - \frac{2b_2^4}{12}.$$

Für das einzelne Winkeleisen bleibt die Hälfte oder

$$T = \frac{1}{24} [(b + b_2)^4 - b_1^4 - 2b_2^4].$$

Nun ist aber $h = (b + b_2) \sqrt{\frac{1}{2}}$ und

Fig. 65.



$h'_s = h - e_s \sqrt{2}$. Demnach wird für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{1}{24} [(b + b_2)^4 - b_1^4 - 2b_2^4] - h_s'^2 (b^2 - b_1^2).$$

In Bezug auf Achse DE giebt das doppelte Γ -Eisen, da

$$CF = (b_1 + b_2) \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist,

$$T_2 = \frac{(b + b_2)^4 - b_1^4}{12} - 2 \left[\frac{b_2^4}{12} + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)^2 b_2^2 \right], \quad T_p = T_1 + T_2.$$

60) Υ -Eisen. Figur 66. Nach Nr. 3) wird

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + b_2) + b_3 h_3 (2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)},$$

$$T_1 = \frac{1}{3} [b_1 h_s^3 + b_3 a_3^3 - b_4 a_4^3 - b_5 a_5^3],$$

$$T_2 = \frac{1}{12} [h_1 b_1^3 + h_2 b_2^3 + h_3 b_3^3].$$

Fig. 66.

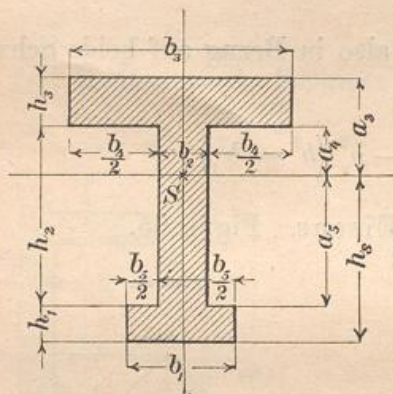
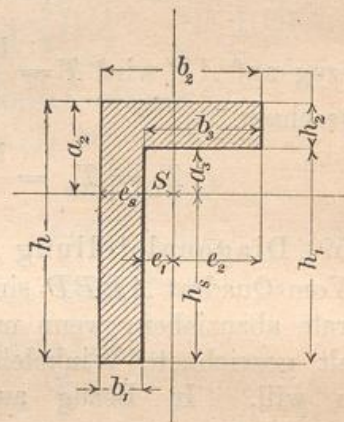


Fig. 67.



61) Γ -Eisen, ungleichschenkl. Figur 67.

Nach Nr. 3) ist

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}, \quad e_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)},$$

$$T_1 = \frac{1}{3} [b_1 h_s^3 + b_2 a_2^3 - b_3 a_3^3],$$

$$T_2 = \frac{1}{3} [h e_s^3 - h_1 e_1^3 + h_2 e_2^3].$$

62) Dreieck, gleichschenkliges.

$$T_1 = \frac{bh^3}{36}, \quad T_2 = \frac{hb^3}{48}, \quad T_p = \frac{bh}{144} (4h^2 + 3b^2).$$

In Bezug auf die Spitze ist infolge der Verschiebung um $\frac{2}{3}h$

$$T_p = \frac{bh}{48} (12h^2 + b^2).$$

Fig. 68.

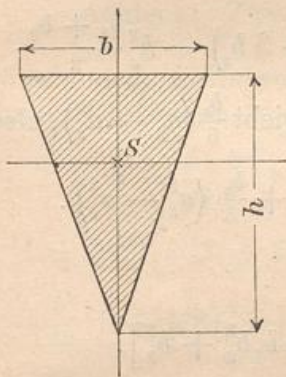
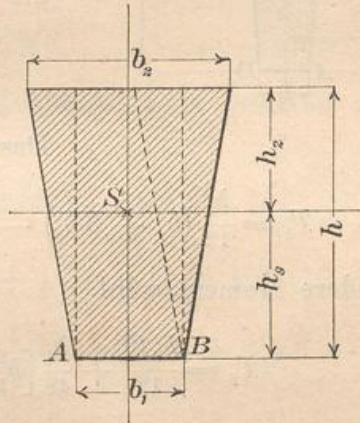


Fig. 69.



63) Trapez. (Annäherungsform für den Hakenquerschnitt.)

Nach Nr. 4) ist

$$h_s = \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)}.$$

In Bezug auf AB hat man durch Parallelogramm und Dreieck

$$\frac{b_1 h^3}{3} + \frac{(b_2 - b_1) h^3}{4} = \frac{h^3}{12} (b_1 + 3b_2).$$

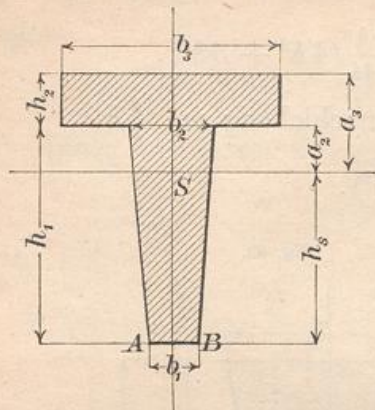
Abzuziehen ist $h_s^2 F$, so dass man erhält

$$T_1 = \frac{h^3}{12} (b_1 + 3b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2} h = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}.$$

Das andere Moment wird

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{hb_1^3}{12} + 2 \left[\frac{h \left(\frac{b_2 - b_1}{2} \right)^3}{36} + \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2 - b_1}{6} \right)^2 \frac{b_2 - b_1}{2} \cdot \frac{h}{2} \right] \\ &= \frac{hb_1^3}{12} + \frac{h(b_2 - b_1)^3}{144} + \frac{2(2b_1 + b_2)^2 (b_2 - b_1) h}{144} \\ &= \frac{hb_1^3}{12} + \frac{h(b_2 - b_1)}{48} (3b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 b_2) = \frac{h}{48} [b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3]. \end{aligned}$$

Fig. 70.



64) Trapezförmiger T-Träger.
Nach Nr. 4) ist

$$h_s = \frac{h_1^2 (b_1 + 2b_2) + (2h_1 + h_2) 3b_2 h_2}{3[(b_1 + b_2)h_1 + 2b_2 h_2]}.$$

In Bezug auf AB giebt das Trapez wie vorher $\frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3b_2)$, also in Bezug auf die Schwerpunktsachse

$$\frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Das Rechteck giebt $\frac{b_2}{3}(a_3^3 - a_2^3)$, also wird

$$T_1 = \frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2} + \frac{b_2}{3}(a_3^3 - a_2^3).$$

Das andere Moment wird

$$T_2 = \frac{h_2 b_2^3}{12} + \frac{h_1}{48} [b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3].$$

65) Regelmäßiges n -Eck.

Aus dem polaren Trägheitsmomente des gleichschenkligen Dreiecks für die Spitze folgt für das regelmäßige n -Eck mit Seite b und Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises das polare Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{nb\varrho}{48} (12\varrho^2 + b^2),$$

Fig. 71.

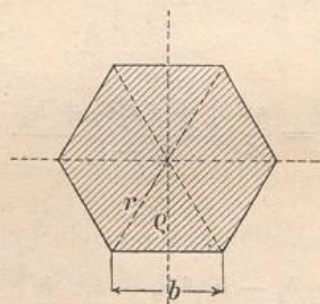
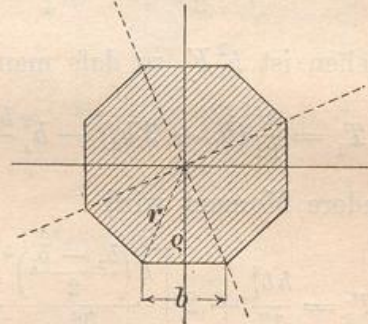


Fig. 72.



folglich sind für jede Symmetrieachse (wie später gezeigt wird sogar für jede beliebige Schwerpunktsachse) die Trägheitsmomente

$$T_1 = T_2 = \frac{nb\varrho}{96} (12\varrho^2 + b^2).$$

Dadurch erhält man folgende Reihe von axialen Trägheitsmomenten, die für jede Schwerpunktsachse der regelmäßigen Vielecke gelten:

- a) regelmäßiges Dreieck: $T = \frac{b^4}{96} \sqrt{3}$, denn hier ist $\varrho = \frac{b}{6} \sqrt{3}$
- b) „ Viereck: $T = \frac{b^4}{12}$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}$
- c) „ Sechseck: $T = \frac{5b^4}{16} \sqrt{3}$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2} \sqrt{3}$
- d) „ Achteck: $T = \frac{b^4}{12} (11 + 8\sqrt{2})$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2} (1 + \sqrt{2})$.

So könnte man fortfahren. — Beim Achteck z. B. gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} T &= \frac{8b}{96} \frac{b}{2} (1 + \sqrt{2}) \left[12 \frac{b^2}{4} (1 + \sqrt{2})^2 + b^2 \right] \\ &= \frac{b^4}{24} (1 + \sqrt{2}) [3(1 + 2 + 2\sqrt{2}) + 1] = \frac{b^4}{24} (1 + \sqrt{2})(10 + 6\sqrt{2}) \\ &= \frac{b^4}{12} (1 + \sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) = \frac{b^4}{12} (5 + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6) \\ &= \frac{b^4}{12} (11 + 8\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Führt man in die Formel des n -Ecks den Umfang $u = \frac{b}{n}$ ein, so geht sie über in

$$T_1 = T_2 = \frac{n \frac{u}{n} \varrho}{96} (12 \varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}) = \frac{u \varrho}{96} (12 \varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}).$$

66) Kreisfläche. Für $n = \infty$ folgt aus der Formel für das regelmäßige n -Eck, wenn man $u = 2 \varrho \pi$ einsetzt,

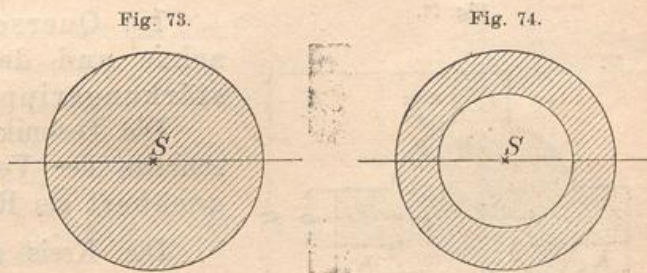
$$\frac{2 \varrho \pi \varrho}{96} (12 \varrho^2 + 0) = \frac{\varrho^4 \pi}{4},$$

oder, wenn man den Durchmesser d einführt,

$$T = \frac{\pi d^4}{64},$$

dagegen, wie in Nr. 42,

$$T_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$



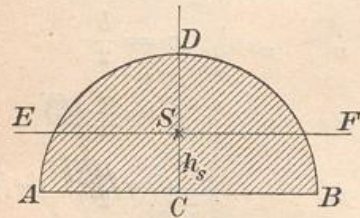
67) Fläche des concentrischen Kreisrings (Hohlsäule).

$$T = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4), \quad T_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4).$$

68) Fläche des Halbkreises.

Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4r}{3\pi}$, in Bezug auf AB ist nach vorigem Beispiele

Fig. 75.



$$T = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Demnach wird für EF

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\pi r^4}{8} - h_s^2 \frac{r^2 \pi}{2} \\ &= \frac{\pi r^4}{8} - \frac{16 r^2 r^2 \pi}{9 \pi^2 \cdot 2} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8 r^4}{9\pi} \end{aligned}$$

oder

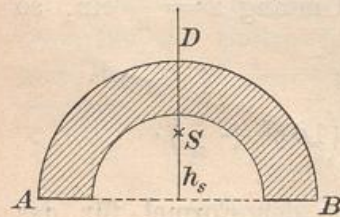
$$T_1 = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = d^4 \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi} \right). \quad (\text{Abgerundet } T_1 = 0,11 r^4.)$$

Dagegen ist $T_2 = \frac{\pi r^4}{8}$, also

$$T_p = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) + \frac{\pi r^4}{8} = r^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right).$$

69) Fläche des halben concentrischen Kreisrings (Halbsäule).

Fig. 76.



Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4(r^3 - r_1^3)}{3\pi(r^2 - r_1^2)}$, außerdem für AB

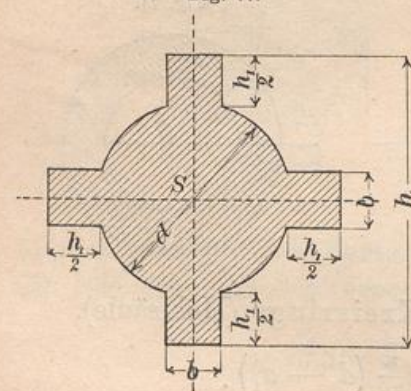
$$T = \frac{\pi}{8} (r^4 - r_1^4),$$

folglich

$$T_1 = \frac{\pi}{8} (r^4 - r_1^4) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8} (r^4 - r_1^4), \quad T_p = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2}.$$

Fig. 77.



70) Querschnitt der Flügelachse und der Säule mit Verstärkungsrippen.

Die Technik betrachtet die Querschnitte der Verstärkungsrippen angenähert als Rechtecke.

Der Kreis giebt $\frac{\pi d^4}{64}$, die senkrecht stehenden Rechtecke nach der Formel für einfache Gurtungen $\frac{b}{12}(h^3 - d^3)$, die horizontal liegenden

$2 \frac{h_1}{2} \frac{b^3}{12} = \frac{h_1 b^3}{12}$, man erhält also $T_1 = T_2 = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{1}{12} [b(h^3 - d^3) + h_1 b^3]$.
Das polare Moment ist $T_p = 2 T_1$.

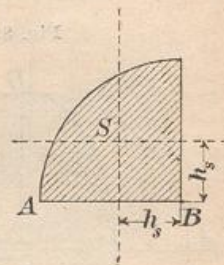
71) Fläche des Viertelkreises.

Für AB hat man $T = \frac{r^4 \pi}{16}$, der Schwerpunktsabstand ist $h_s = \frac{4r}{3\pi}$, daraus folgt (vgl. Nr. 68)

$$T_1 = T_2 = \frac{r^4 \pi}{16} - h_s^2 \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{r^4 \pi}{16} - \frac{16 r^2 r^2 \pi}{9 \pi^2 4}$$

$$= r^4 \left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right], \quad T_p = r^4 \left[\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right].$$

Fig. 78.



72) Fläche des allgemeinen Kreisabschnittes (Sektors).
Vorläufig kann nur das polare Trägheitsmoment berechnet werden.

Für die Kreisfläche war dieses $\frac{r^4 \pi}{2}$, also ist es für den Sektor in Bezug auf den Punkt M

$$T = \frac{r^4 \pi}{2} \frac{\alpha^3}{360^\circ} = \frac{r^4 \pi \alpha}{720},$$

sobald α in Graden gegeben ist. Nach Nr. 10) ist

$$h_s = \frac{2rs}{3b} \quad (b = \text{Bogen})$$

$$(s = \text{Sehne})$$

folglich ist für S

$$T_p = \frac{r^4 \pi \alpha}{720} - h_s^2 \cdot r^2 \pi \frac{\alpha}{360} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} \left[\frac{r^2}{2} - h_s^2 \right].$$

Zur Ableitung der axialen Momente sind später zu entwickelnde Hilfssätze nötig.

73) Fläche des Kreisabschnittes (Segmentes).

Auch hier kann zunächst nur das Polarmoment berechnet werden. Vom Sektor ist das Dreieck abzuziehen, also wird für M

$$T_p = \frac{r^4 \pi \alpha}{720} - \frac{sh}{48} (12h^2 + s^2).$$

Nach Nr. 7) ist $h_s = \frac{s^2}{12F}$, also wird für den Schwerpunkt S

$$T_p = \frac{r^4 \pi \alpha}{720} - \frac{sh}{48} (12h^2 + s^2) - h_s^2 F,$$

wo $F = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} - \frac{sh}{2}$ ist.

Fig. 79.

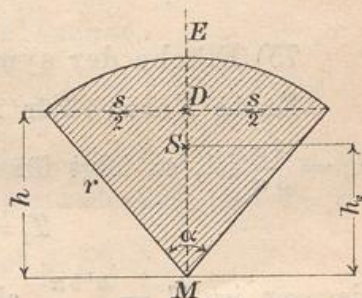
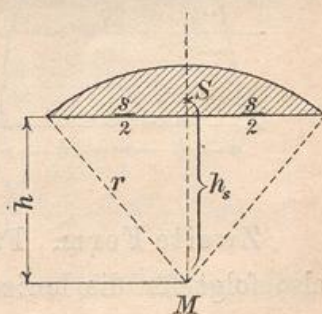


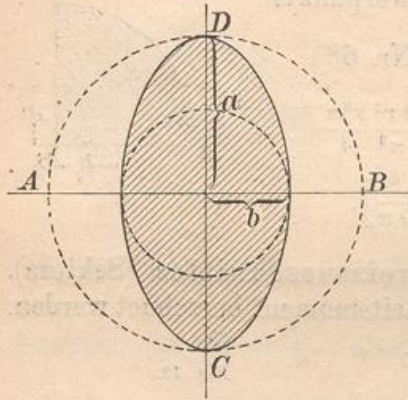
Fig. 80.



74) Fläche der Ellipse. (Vgl. Nr. 12.)

Aus der Formel für den Kreis mit Radius a folgt durch Verkleinerung der Sehnen mittels des konstanten Faktors $\frac{b}{a}$

Fig. 81.



$$T_1 = \frac{a^4 \pi}{4} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a^3 b \pi}{4}.$$

Für die Achse CD nimmt man den kleinen Kreis zu Hülfe und findet mittels des konstanten Vergrößerungsfaktors $\frac{a}{b}$

$$T_2 = \frac{b^4 \pi}{4} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a b^3 \pi}{4}.$$

Das Polarmoment wird

$$T_p = \frac{a b \pi}{4} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2).$$

75) Fläche der symmetrischen Halbellipse.

Erste Form. Für AB ist $T' = \frac{a^3 b \pi}{8}$, da aber nach Nr. 12)

$h_s = \frac{4a}{3\pi}$ ist, so folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a^3 b \pi}{8} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2},$$

dagegen ist $T_2 = \frac{a^3 b \pi}{8}$, also $T_p = \frac{a^3 b \pi}{4} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2}$.

Fig. 82.

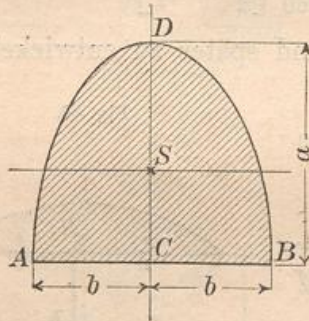
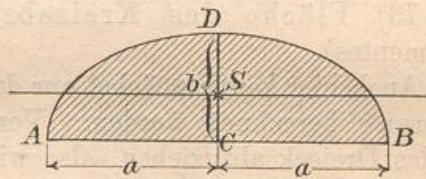


Fig. 83.



Zweite Form. Für AB ist $T' = \frac{a b^3 \pi}{8}$, nach Nr. 12) ist $h_s = \frac{4b}{3\pi}$, also folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a b^3 \pi}{8} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2},$$

während $T_2 = \frac{a b^3 \pi}{8}$ ist. $T_p = \frac{a b^3 \pi}{4} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2}$.

76) Fläche der unsymmetrischen Halbellipse.

Diese allgemeinere Form läßt sich aus Fig. 82 durch Horizontalverschiebung der Elementarstreifen herstellen, wobei weder das statische Moment, noch die Schwerpunkthöhe, noch das axiale Trägheitsmoment für AB geändert wird. Die Fläche der Halbellipse bleibt dabei $\frac{b_1 h \pi}{2}$, oder, da $h = a_1 \sin \gamma$ ist,

$$F = \frac{a_1 b_1 \pi \sin \gamma}{2}. \text{ Ferner ist } h_s = \frac{4h}{3\pi}, \text{ ebenso}$$

$$CS = \frac{4a_1}{3\pi}, \quad CE = \frac{4a_1}{3\pi} \cos \gamma = e_s. \quad \text{Für } AB \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} T' &= \frac{b_1 h^3 \pi}{8} = \frac{b_1 (a_1 \sin \gamma)^3 \pi}{8} \\ &= \frac{F}{4} a_1^2 \sin^2 \gamma = \frac{F}{4} h^2, \end{aligned}$$

folglich für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{b_1 h^3 \pi}{8} - \left(\frac{4h}{3\pi}\right)^2 \frac{b_1 h \pi}{2} = \frac{(a_1 \sin \gamma)^3 b_1 \pi}{8} - \left(\frac{4a_1 \sin \gamma}{3\pi}\right)^2 \frac{a_1 b_1 \pi \sin \gamma}{2}.$$

T_2 kann mit Hülfe von T_p berechnet werden, denn für C ist, wenn a und b die wirklichen Halbachsen der Ellipse bedeuten, nach Nr. 74

$$T_p = \frac{ab\pi}{8} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2).$$

Diese Halbachsen a und b kann man mittels der aus der Geometrie bekannten Formeln

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

$$ab = a_1 b_1 \sin \gamma$$

berechnen, was aber hier überflüssig ist. Einsetzung giebt nämlich sofort

$$T_p = \frac{a_1 b_1 \sin \gamma}{8} (a_1^2 + b_1^2) = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2).$$

Für die durch C gehende Vertikalachse wird

$$T_2 = T_p - T_1 = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2) - \frac{F}{4} h^2 = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2 - h^2).$$

Verschiebung um $e_s = \frac{4a_1 \cos \gamma}{3\pi}$ giebt für die senkrechte Schwerpunktsachse HJ

$$T_2 = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2 - h^2) - \left(\frac{4a_1 \cos \gamma}{3\pi}\right)^2 F,$$

oder

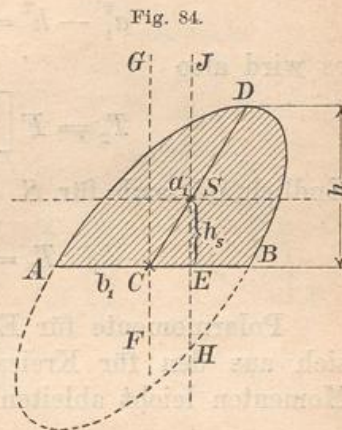


Fig. 84.

$$T_2 = F \left[\frac{a_1^2 + b_1^2 - h^2}{4} - \left(\frac{4 a_1 \cos \gamma}{3 \pi} \right)^2 \right].$$

Hier ist

$$a_1^2 - h^2 = a_1^2 - a_1^2 \sin^2 \alpha = a_1^2 \cos^2 \alpha,$$

es wird also

$$T_2 = F \left[\frac{a_1^2 \cos^2 \alpha + b_1^2}{4} - \left(\frac{4 a_1 \cos \gamma}{3 \pi} \right)^2 \right].$$

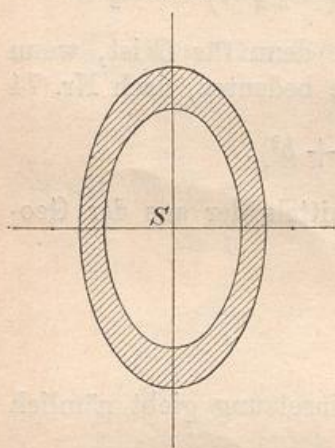
Endlich ist noch für S

$$T_p = F \left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{4} - \left(\frac{4 a_1}{3 \pi} \right)^2 \right].$$

Polarmomente für Ellipsenabschnitte und Ellipsenfaktoren lassen sich aus den für Kreisabschnitte und Kreisabschnitte berechneten Momenten leicht ableiten.

77) Elliptischer Ringquerschnitt. Sind a_1 und a_2 die großen, b_1 und b_2 die kleinen Halbachsen, so wird

Fig. 85.



$$T_1 = \frac{a_1^3 b_1 \pi}{4} - \frac{a_2^3 b_2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2).$$

Ebenso

$$T_2 = \frac{\pi}{4} (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3),$$

$$T_p = T_1 + T_2$$

$$= \frac{\pi}{4} [a_1 b_1 (a_1^2 + b_1^2) - a_2 b_2 (a_2^2 + b_2^2)].$$

Hier ist zu bemerken, dass die Wandstärken verschieden ausfallen. Ist $a : a_1 = b : b_1$, so erhält man ähnliche Ellipsen. Nimmt man die Wandstärke überall gleich groß, so wird die eine Curve eine solche 4^{ten} Grades, und zwar die Parallelcurve der Ellipse. Bei geringen Wandstärken ist jedoch der Unterschied so klein, dass er für praktische Berechnungen vernachlässigt werden kann, so dass die gegebenen Formeln fortgelten.

78) Elliptischer Halbring. Gleichung für die statischen Momente in Bezug auf AB :

$$h_s \cdot F = \frac{4 a_1}{3 \pi} F_1 - \frac{4 a_2}{3 \pi} F_2,$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{4a_1}{3\pi} \cdot \frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{4a_2}{3\pi} \cdot \frac{a_2 b_2 \pi}{2}}{\frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{a_2 b_2 \pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \frac{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

In Bezug auf AB ist

$$T = \frac{\pi}{8} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2),$$

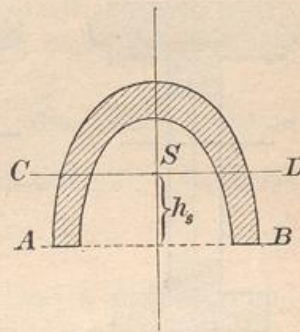
folglich in Bezug auf die Schwerpunktsachsen

$$T_1 = \frac{\pi}{8} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2) - h_s^2 \cdot \frac{\pi}{2} (a_1 b_1 - a_2 b_2),$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8} (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3); \quad T_p = T_1 + T_2.$$

Auch der schräge (unsymmetrische) Halbring läßt sich im Anschluß an Nr. 76) behandeln.

Fig. 86 a.



B. Bemerkungen und numerische Beispiele.

79) Eine große Anzahl weiterer Übungsbeispiele über die Querschnittsformen des praktischen Maschinenbaues ließe sich hier anschließen. Einige sind durch Zeichnungen angedeutet. Figur 86 b, c, d, e. — In der Regel beschränkt sich aber die Praxis auf die behandelten rein schematisch aufzufassenden Formen.

Fig. 86 b.

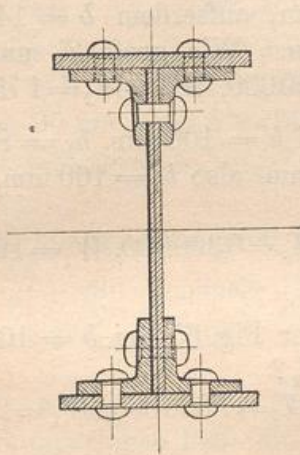
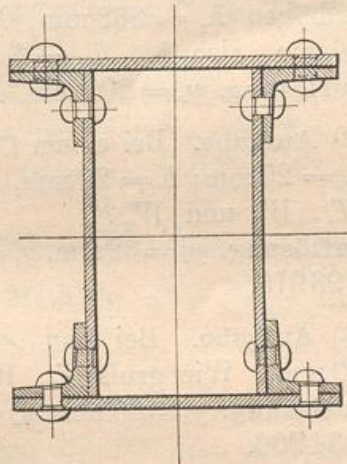


Fig. 86 c.



Sind die Querschnitte nicht einheitlich, sondern in ihren Teilen durch Niete mit einander verbunden, so ist darauf zu achten, daß mindestens der Einfluß der Nietlöcher berücksichtigt werden muß. An einigen der Zeichnungen ist dies angedeutet. Bei Gurtungen, die große Entfernungen von der neutralen Achse haben, kann der