Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

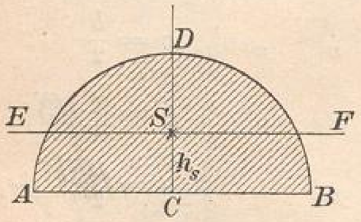
Leipzig, 1897

Flügelachse, Viertelkreis, Kreis-Ausschnitt und -Abschnitt.

68) Fläche des Halbkreises.

Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4\,r}{3\,\pi}$, in Bezug auf AB ist nach vorigem Beispiele

Fig. 75.



$$T = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Demnach wird für EF

$$T_1 = \frac{\pi r^4}{8} - h_s^2 \frac{r^2 \pi}{2}$$

$$= \frac{\pi r^4}{8} - \frac{16\, r^2}{9\,\pi^2} \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8\, r^4}{9\,\pi}$$

oder

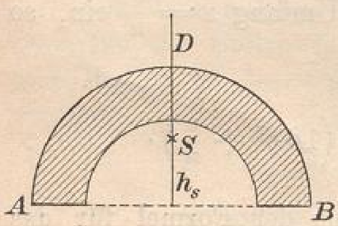
$$T_1 = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) = d^4 \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\,\pi}\right). \quad \text{(Abgerundet } T_1 = 0{,}11\, r^4.\text{)}$$

Dagegen ist $T_2 = \frac{\pi r^4}{8}$, also

$$T_p = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) + \frac{\pi r^4}{8} = r^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\,\pi}\right).$$

69) Fläche des halben concentrischen Kreisrings (Halbsäule).

Fig. 76.



Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\,\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}$, aufserdem für AB

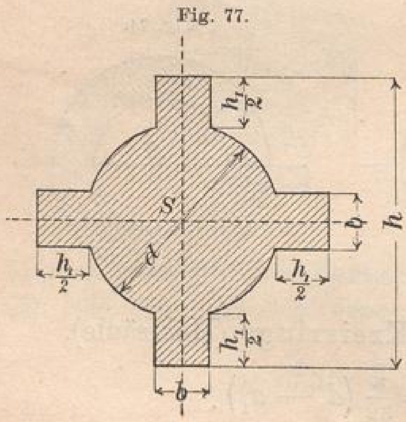
$$T = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right),$$

folglich

$$T_1 = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right), \quad T_p = \frac{\pi}{4}\left(r^4 - r_1^4\right) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2}.$$

Fig. 77.



70) Querschnitt der Flügelachse und der Säule mit Verstärkungsrippen.

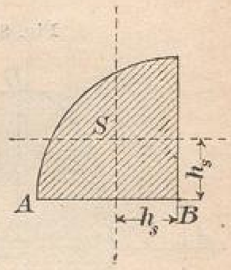
Die Technik betrachtet die Querschnitte der Verstärkungsrippen angenähert als Rechtecke.

Der Kreis giebt $\frac{\pi d^4}{64}$, die senkrecht stehenden Rechtecke nach der Formel für einfache Gurtungen $\frac{b}{12}\left(h^3 - d^3\right)$, die horizontal liegenden

$2\frac{h_1}{2}\frac{b^3}{12} = \frac{h_1 b^3}{12}$, man erhält also $T_1 = T_2 = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{1}{12}[b(h^3 - d^3) + h_1 b^3]$.
Das polare Moment ist $T_p = 2\,T_1$.

71) Fläche des Viertelkreises.

Fig. 78.



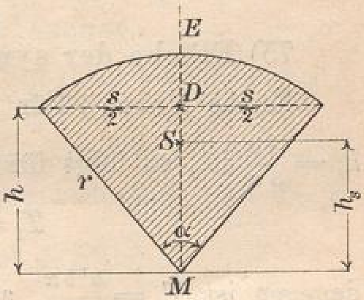
Für AB hat man $T = \frac{r^4\pi}{16}$, der Schwerpunktsabstand ist $h_s = \frac{4r}{3\pi}$, daraus folgt (vgl. Nr. 68)

$$T_1 = T_2 = \frac{r^4\pi}{16} - h_s^2\frac{r^2\pi}{4} = \frac{r^4\pi}{16} - \frac{16\,r^2}{9\,\pi^2}\frac{r^2\pi}{4}$$

$$= r^4\left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\,\pi}\right], \quad T_p = r^4\left[\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right].$$

72) Fläche des allgemeinen Kreisausschnittes (Sektors).
Vorläufig kann nur das polare Trägheitsmoment berechnet werden.

Fig. 79.



Für die Kreisfläche war dieses $\frac{r^4\pi}{2}$, also ist es für den Sektor in Bezug auf den Punkt M

$$T = \frac{r^4\pi}{2}\,\frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

sobald α in Graden gegeben ist. Nach Nr. 10) ist

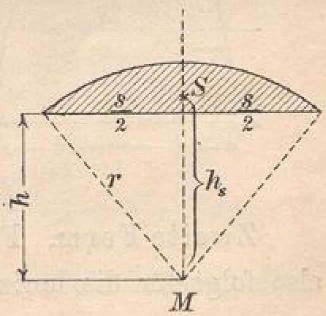
$$h_s = \frac{2\,rs}{3\,b}\ \begin{pmatrix} b = \text{Bogen} \\ s = \text{Sehne} \end{pmatrix}$$

folglich ist für S

$$T_p = \frac{r^4\pi\alpha}{720} - h_s^2\cdot r^2\pi\,\frac{\alpha}{360} = \frac{r^2\pi\alpha}{360}\left[\frac{r^2}{2} - h_s^2\right].$$

Zur Ableitung der axialen Momente sind später zu entwickelnde Hülfssätze nötig.

Fig. 80.



73) Fläche des Kreisabschnittes (Segmentes).

Auch hier kann zunächst nur das Polarmoment berechnet werden. Vom Sektor ist das Dreieck abzuziehen, also wird für M

$$T_p = \frac{r^4\pi\alpha}{720} - \frac{sh}{48}(12\,h^2 + s^2).$$

Nach Nr. 7) ist $h_s = \frac{s^2}{12\,F}$, also wird für den Schwerpunkt S

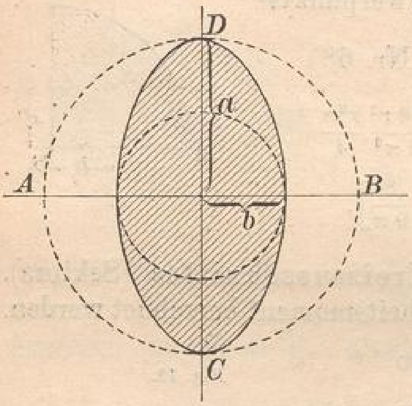
$$T_p = \frac{r^4\pi\alpha}{720} - \frac{sh}{48}(12\,h^2 + s^2) - h_s^2 F,$$

wo $F = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{sh}{2}$ ist.

74) Fläche der Ellipse. (Vgl. Nr. 12.)

Aus der Formel für den Kreis mit Radius a folgt durch Verkleinerung der Sehnen mittels des konstanten Faktors $\frac{b}{a}$

Fig. 81.



$$T_1 = \frac{a^4\pi}{4} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a^3 b\pi}{4}.$$

Für die Achse CD nimmt man den kleinen Kreis zu Hülfe und findet mittels des konstanten Vergröſserungsfaktors $\frac{a}{b}$

$$T_2 = \frac{b^4\pi}{4} \frac{a}{b} = \frac{ab^3\pi}{4}.$$

Das Polarmoment wird

$$T_p = \frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

75) Fläche der symmetrischen Halbellipse.

Erste Form. Für AB ist $T' = \frac{a^3 b\pi}{8}$, da aber nach Nr. 12) $h_s = \frac{4a}{3\pi}$ ist, so folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a^3 b\pi}{8} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2},$$

dagegen ist $T_2 = \frac{a^3 b\pi}{8}$, also $T_p = \frac{a^3 b\pi}{4} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2}$.

Fig. 82.

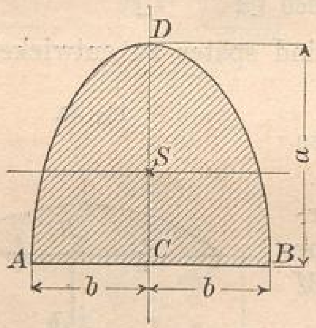
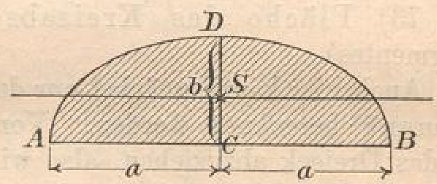


Fig. 83



Zweite Form. Für AB ist $T' = \frac{ab^3\pi}{8}$, nach Nr. 12) ist $h_s = \frac{4b}{3\pi}$, also folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{ab^3\pi}{8} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2},$$

während $T_2 = \frac{ab^3\pi}{8}$ ist. $T_p = \frac{ab^3\pi}{4} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2}$.