



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

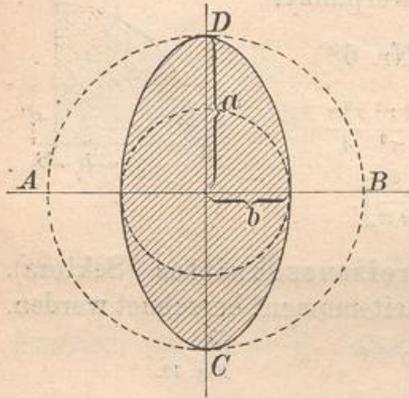
Ellipse, Halbellipse, elliptischer Ring.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

74) Fläche der Ellipse. (Vgl. Nr. 12.)

Aus der Formel für den Kreis mit Radius a folgt durch Verkleinerung der Sehnen mittels des konstanten Faktors $\frac{b}{a}$

Fig. 81.



$$T_1 = \frac{a^4 \pi}{4} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a^3 b \pi}{4}.$$

Für die Achse CD nimmt man den kleinen Kreis zu Hülfe und findet mittels des konstanten Vergrößerungsfaktors $\frac{a}{b}$

$$T_2 = \frac{b^4 \pi}{4} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a b^3 \pi}{4}.$$

Das Polarmoment wird

$$T_p = \frac{a b \pi}{4} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2).$$

75) Fläche der symmetrischen Halbellipse.

Erste Form. Für AB ist $T' = \frac{a^3 b \pi}{8}$, da aber nach Nr. 12)

$h_s = \frac{4a}{3\pi}$ ist, so folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a^3 b \pi}{8} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2},$$

dagegen ist $T_2 = \frac{a^3 b \pi}{8}$, also $T_p = \frac{a^3 b \pi}{4} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2}$.

Fig. 82.

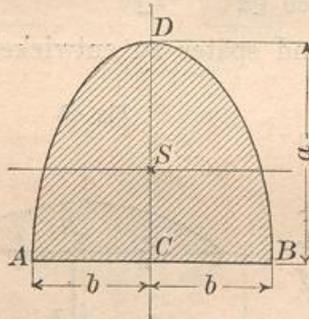
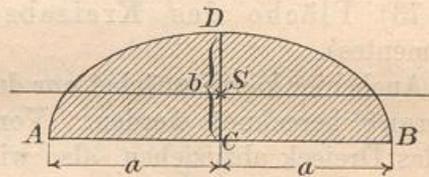


Fig. 83.



Zweite Form. Für AB ist $T' = \frac{a b^3 \pi}{8}$, nach Nr. 12) ist $h_s = \frac{4b}{3\pi}$, also folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a b^3 \pi}{8} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2},$$

während $T_2 = \frac{a b^3 \pi}{8}$ ist. $T_p = \frac{a b^3 \pi}{4} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{a b \pi}{2}$.

76) Fläche der unsymmetrischen Halbellipse.

Diese allgemeinere Form läßt sich aus Fig. 82 durch Horizontalverschiebung der Elementarstreifen herstellen, wobei weder das statische Moment, noch die Schwerpunkthöhe, noch das axiale Trägheitsmoment für AB geändert wird. Die Fläche der Halbellipse bleibt dabei $\frac{b_1 h \pi}{2}$, oder, da $h = a_1 \sin \gamma$ ist,

$$F = \frac{a_1 b_1 \pi \sin \gamma}{2}. \text{ Ferner ist } h_s = \frac{4h}{3\pi}, \text{ ebenso}$$

$$CS = \frac{4a_1}{3\pi}, \quad CE = \frac{4a_1}{3\pi} \cos \gamma = e_s. \quad \text{Für } AB \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} T' &= \frac{b_1 h^3 \pi}{8} = \frac{b_1 (a_1 \sin \gamma)^3 \pi}{8} \\ &= \frac{F}{4} a_1^2 \sin^2 \gamma = \frac{F}{4} h^2, \end{aligned}$$

folglich für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{b_1 h^3 \pi}{8} - \left(\frac{4h}{3\pi}\right)^2 \frac{b_1 h \pi}{2} = \frac{(a_1 \sin \gamma)^3 b_1 \pi}{8} - \left(\frac{4a_1 \sin \gamma}{3\pi}\right)^2 \frac{a_1 b_1 \pi \sin \gamma}{2}.$$

T_2 kann mit Hülfe von T_p berechnet werden, denn für C ist, wenn a und b die wirklichen Halbachsen der Ellipse bedeuten, nach Nr. 74

$$T_p = \frac{ab\pi}{8} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2).$$

Diese Halbachsen a und b kann man mittels der aus der Geometrie bekannten Formeln

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

$$ab = a_1 b_1 \sin \gamma$$

berechnen, was aber hier überflüssig ist. Einsetzung giebt nämlich sofort

$$T_p = \frac{a_1 b_1 \sin \gamma}{8} (a_1^2 + b_1^2) = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2).$$

Für die durch C gehende Vertikalachse wird

$$T_2 = T_p - T_1 = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2) - \frac{F}{4} h^2 = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2 - h^2).$$

Verschiebung um $e_s = \frac{4a_1 \cos \gamma}{3\pi}$ giebt für die senkrechte Schwerpunktsachse HJ

$$T_2 = \frac{F}{4} (a_1^2 + b_1^2 - h^2) - \left(\frac{4a_1 \cos \gamma}{3\pi}\right)^2 F,$$

oder

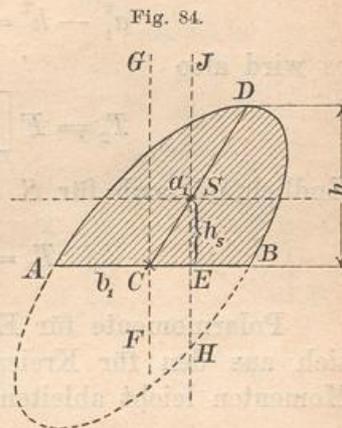


Fig. 84.

$$T_2 = F \left[\frac{a_1^2 + b_1^2 - h^2}{4} - \left(\frac{4 a_1 \cos \gamma}{3 \pi} \right)^2 \right].$$

Hier ist

$$a_1^2 - h^2 = a_1^2 - a_1^2 \sin^2 \alpha = a_1^2 \cos^2 \alpha,$$

es wird also

$$T_2 = F \left[\frac{a_1^2 \cos^2 \alpha + b_1^2}{4} - \left(\frac{4 a_1 \cos \gamma}{3 \pi} \right)^2 \right].$$

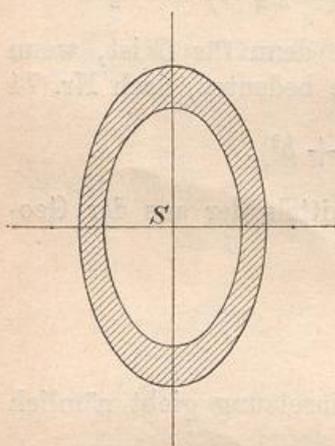
Endlich ist noch für S

$$T_p = F \left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{4} - \left(\frac{4 a_1}{3 \pi} \right)^2 \right].$$

Polarmomente für Ellipsenabschnitte und Ellipsenfaktoren lassen sich aus den für Kreisabschnitte und Kreisabschnitte berechneten Momenten leicht ableiten.

77) Elliptischer Ringquerschnitt. Sind a_1 und a_2 die großen, b_1 und b_2 die kleinen Halbachsen, so wird

Fig. 85.



$$T_1 = \frac{a_1^3 b_1 \pi}{4} - \frac{a_2^3 b_2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2).$$

Ebenso

$$T_2 = \frac{\pi}{4} (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3),$$

$$T_p = T_1 + T_2$$

$$= \frac{\pi}{4} [a_1 b_1 (a_1^2 + b_1^2) - a_2 b_2 (a_2^2 + b_2^2)].$$

Hier ist zu bemerken, dass die Wandstärken verschieden ausfallen. Ist $a : a_1 = b : b_1$, so erhält man ähnliche Ellipsen. Nimmt man die Wandstärke überall gleich groß, so wird die eine Curve eine solche 4^{ten} Grades, und zwar die Parallelcurve der Ellipse. Bei geringen Wandstärken ist jedoch der Unterschied so klein, dass er für praktische Berechnungen vernachlässigt werden kann, so dass die gegebenen Formeln fortgelten.

78) Elliptischer Halbring. Gleichung für die statischen Momente in Bezug auf AB :

$$h_s \cdot F = \frac{4 a_1}{3 \pi} F_1 - \frac{4 a_2}{3 \pi} F_2,$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{4a_1}{3\pi} \cdot \frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{4a_2}{3\pi} \cdot \frac{a_2 b_2 \pi}{2}}{\frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{a_2 b_2 \pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \frac{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

In Bezug auf AB ist

$$T = \frac{\pi}{8} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2),$$

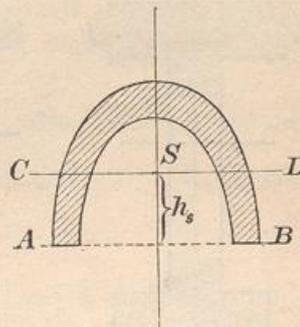
folglich in Bezug auf die Schwerpunktsachsen

$$T_1 = \frac{\pi}{8} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2) - h_s^2 \cdot \frac{\pi}{2} (a_1 b_1 - a_2 b_2),$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8} (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3); \quad T_p = T_1 + T_2.$$

Auch der schräge (unsymmetrische) Halbring läßt sich im Anschluß an Nr. 76) behandeln.

Fig. 86 a.



B. Bemerkungen und numerische Beispiele.

79) Eine große Anzahl weiterer Übungsbeispiele über die Querschnittsformen des praktischen Maschinenbaues ließe sich hier anschließen. Einige sind durch Zeichnungen angedeutet. Figur 86 b, c, d, e. — In der Regel beschränkt sich aber die Praxis auf die behandelten rein schematisch aufzufassenden Formen.

Fig. 86 b.

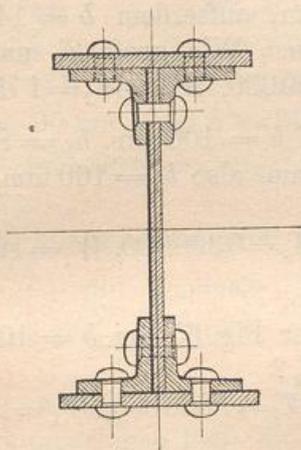
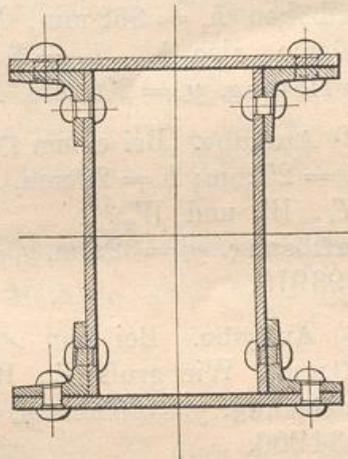


Fig. 86 c.



Sind die Querschnitte nicht einheitlich, sondern in ihren Teilen durch Niete mit einander verbunden, so ist darauf zu achten, daß mindestens der Einfluß der Nietlöcher berücksichtigt werden muß. An einigen der Zeichnungen ist dies angedeutet. Bei Gurtungen, die große Entfernungen von der neutralen Achse haben, kann der