Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Halbkreis, Halbellipse und symmetrische Fläche.

$$x_s = \frac{T_y}{J} = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{r^4\pi}{8} + r^2 \cdot \frac{r^2\pi}{2}}{\frac{r^2\pi}{2} \cdot r} = \frac{5}{4} r.$$

Dagegen wird

$$y_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

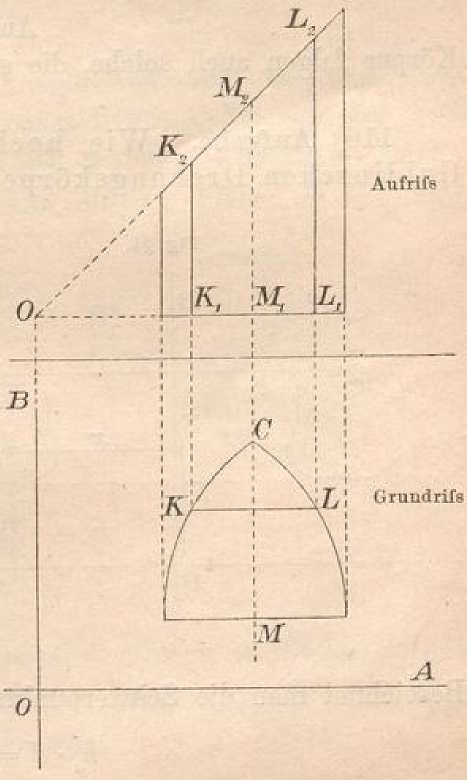
Hier handelt es sich um einen Fall, wo das Centrifugalmoment aus Symmetriegründen besser mit Hülfe der andern Abschrägung berechnet wird. Der Inhalt des neuen Körpers wird bei 45° Neigung der Schrägfläche nach Nr. 21) $J = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3$, der Hebelarm für das statische Moment in Bezug auf OB ist r, also ist $M_{xy} = \frac{2}{3} r^4$. So folgt schliefslich für den zuerst betrachteten Körper

$$y^s = \frac{\frac{2}{3} r^4}{\frac{r^3\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das an der Stelle x_s, y_s errichtete Lot hat die Höhe $\frac{5}{4} r$. In der halben Höhe, d. h. in der Höhe $\frac{5}{8} r$, befindet sich der Körperschwerpunkt. Bei anderer Neigung ist mit tang α zu multiplizieren.

Der Abstand y_s entspricht dem des Schwerpunktes der Kreisfläche von OA. Es fragt sich, ob dies in allen Symmetriefällen stattfindet; wie sich sofort zeigen wird, ist diese Frage zu bejahen.

Fig. 92.

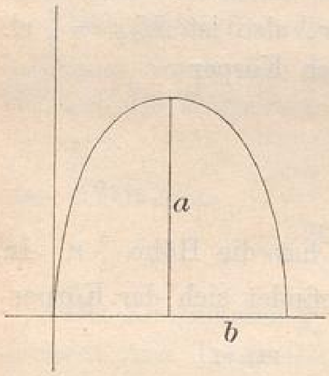


115) Der Fall der symmetrischen Fläche. Die im Grundrifs gezeichnete Fläche F sei symmetrisch gegen CM. Jeder Schnitt wie KL erscheint dann im Aufrifs als Trapez $K_1 L_1 L_2 K_2$ mit der Mittellinie $M_1 M_2$. Das Moment dieses Schnittes in Bezug auf OA ist also ebenso grofs, als ob über KL ein Rechteck von der Höhe $M_1 M_2$ stände. Dies gilt für jeden der zu KL parallelen Schnitte, folglich ist das statische Moment des abgeschrägten Körpers in Bezug

auf OA ebenso grofs, als das der Säule von überall gleicher Höhe M_1M_2. Folglich liegt die Schwerpunktsprojektion für den abgeschrägten Körper in derselben Entfernung y_s, wie bei der gewöhnlichen Säule, d. h. in der Schwerpunktsentfernung der Grundfläche. Dagegen hat x_s für beide Fälle verschiedene Lagen.

Im Falle der Symmetrie ist demnach das Centrifugalmoment besonders leicht zu berechnen. Man multipliziert den Inhalt des über F stehenden Körpers, der durch eine Ebene abgeschrägt ist, die selbst durch eine zur Symmetrieachse Parallele OB geht, mit dem Schwerpunktsabstande der Fläche von der zweiten Achse, so dafs

Fig. 93.



$$M_{xy} = y_s J = y_s M_y$$

ist.

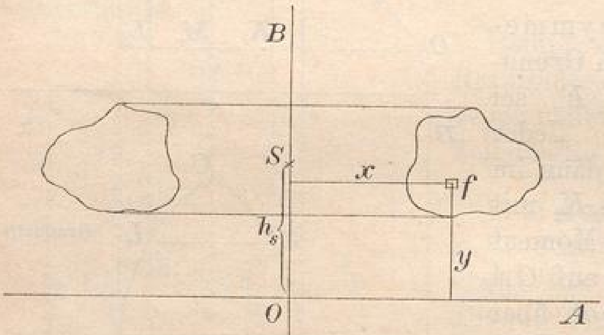
So erhält man z. B. für die vorige Halbkreisaufgabe sofort $M_{xy} = \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{r^3\pi}{2} = \frac{2}{3} r^4$ ohne Benutzung der zweiten Abschrägung. Ebenso folgt für die nebenstehende Halbellipse

$$M_{xy} = \frac{4a}{3\pi} \frac{ab\pi}{2} \cdot b = \frac{2}{3} a^2 b^2 .$$

Aus den Anwendungen auf abgeschrägte Körper folgen auch solche, die sich auf Drehungskörper beziehen.

116) **Aufgabe.** Wie hoch liegt der Schwerpunkt eines Guldinschen Drehungskörpers?

Fig. 94.



Auflösung. Das Flächenteilchen f giebt bei der Drehung den Inhalt $2\pi f x$, sein statisches Moment in Bezug auf die durch OA dargestellte Grundebene ist also $2\pi f x y$, das statische Moment des Gesamtkörpers in Bezug auf die Grundebene wird also gleich $2\pi \sum f x y$ oder $2\pi M_{xy}$.

Bezeichnet man die Schwerpunktshöhe mit h_s, so erhält man

$$h_s \cdot J = 2\pi M_{xy} .$$