Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Trägheitsradius.

gegeben, so sind die neuen Koordinaten $x = p + \xi$, $y = q + \eta$, und das Produkt xy wird gleich $(p + \xi)(q + \eta) = pq + \xi\eta + p\eta + q\xi$, so dafs

$$\sum fxy = pq \sum f + \sum f\xi\eta + p \sum f\eta + q \sum f\xi$$

wird. Der erste Posten giebt pqF, der zweite ist das ursprüngliche Centrifugalmoment $M_{\xi\eta}$, der dritte wird Null, da es sich um das statische Moment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse handelt. Ebenso verschwindet der letzte Posten. Man hat also

$$M_{xy} = M_{\xi\eta} + pqF.$$

Folglich: Bei der durch $x = \xi + p$ und $y = \eta + q$ bestimmten Parallelverschiebung der Achsen aus der Schwerpunktslage wächst das ursprüngliche Centrifugalmoment um das Produkt aus der Fläche F und dem Verschiebungsrechteck pq.

Haben p und q gleiche Zeichen, so ist der Zuwachs positiv, haben sie verschiedene Zeichen, so ist er negativ. Ist p oder q gleich Null, d. h. verschiebt sich nur die eine der Schwerpunktsachsen, so ist der Zuwachs gleich Null, und das Centrifugalmoment bleibt unverändert. War das ursprüngliche Centrifugalmoment gleich Null, was bei Symmetrieachsen stets der Fall ist, so ist

$$M_{xy} = pqF,$$

was bequem ausgewertet werden kann. (Später wird sich zeigen, dafs dies bei jeder Mittelpunktsachse regelmäfsiger Flächen der Fall ist.)

Die Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null ist, sind von besonderer Wichtigkeit für die Berechnung von Trägheitsmomenten für beliebige Achsen, denn die in Nr. 109) abgeleitete Gleichung

$$T_\xi = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$

geht dann über in die einfachere Form

$$T_\xi = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y.$$

124) Der Trägheitsradius.

Für das Rechteck war in Bezug auf die Seite b das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{3}$. Man kann fragen, in welcher Entfernung von b man sich die gesamte Fläche (Masse) concentriert denken müsse, damit das Trägheitsmoment dasselbe sei. Man erreicht dies, indem man $F\varrho^2 = T$, also hier $bh\varrho^2 = \frac{bh^3}{3}$ setzt. Für das Rechteck folgt daraus $\varrho^2 = \frac{h^2}{3}$, oder $\varrho = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Allgemein erhält man für jede beliebige Fläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}}.$$

Für die Mittellinie des Rechtecks erhält man

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{6}\sqrt{3}.$$

Beim Kreise ergiebt sich in Bezug auf den Durchmesser

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{r^4\pi}{4}}{r^2\pi}} = \frac{r}{2}.$$

Den so bestimmten Radius nennt man den Radius des Trägheitsmomentes oder kurz den Trägheitsradius.

Entsprechende Betrachtungen kann man für das polare Trägheitsmoment anstellen, wo sich ergiebt

$$\varrho = \sqrt{\frac{T_p}{F}}.$$

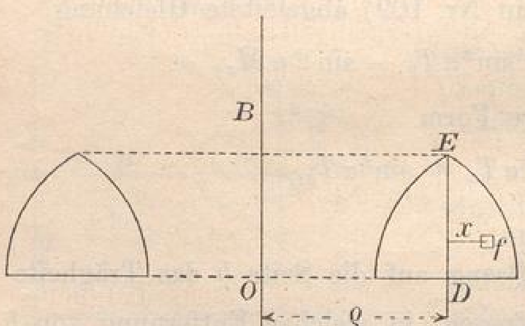
So ist z. B. für die Kreisfläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{\frac{r^4\pi}{2}}{r^2\pi}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Der Trägheitsradius dient zur Vereinfachung von Rechnungen und Formeln.

Ein Beispiel für seine Verwendung bietet die folgende Aufgabe.

Fig. 105.



125) **Aufgabe.** Ein ringförmiger Körper entstehe durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrieachse parallele Gerade. Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Drehungskörpers in Bezug auf diese Achse?

Auflösung. Jedes Flächenteilchen f in der Entfernung $\varrho + x$ von der Achse OB giebt nach Guldin einen Ring vom Inhalte $2(\varrho + x)\pi f$. Ist m die Masse dieses Ringes, so ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf OB gleich