Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Satz von der Trägheitsellipse.

130) Satz von der Trägheitsellipse.

In Abschnitt 109 war gezeigt worden, dafs man aus den Trägheitsmomenten T_x und T_y einer Fläche das Trägheitsmoment T_ξ für eine um α gegen OA gedrehte Achse mit Hülfe folgender Gleichung findet:

$$T_\xi = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy},$$

wo M_{xy} das Centrifugalmoment in Bezug auf die ursprünglichen Achsen ist. Führt man für T_ξ, T_x und T_y die Trägheitsradien ϱ, ϱ_1 und ϱ_2 ein, so hat man zu setzen $T_\xi = F\varrho^2$, $T_x = F\varrho_1^2$, $T_y = F\varrho_2^2$. Für das Centrifugalmoment werde der Radius c durch die Gleichung $M_{xy} = Fc^2$ eingesetzt. Dadurch geht die Gleichung über in

$$F\varrho^2 = F\varrho_1^2 \cos^2\alpha + F\varrho_2^2 \sin^2\alpha - Fc^2 \sin 2\alpha,$$

oder nach beiderseitiger Division durch F in

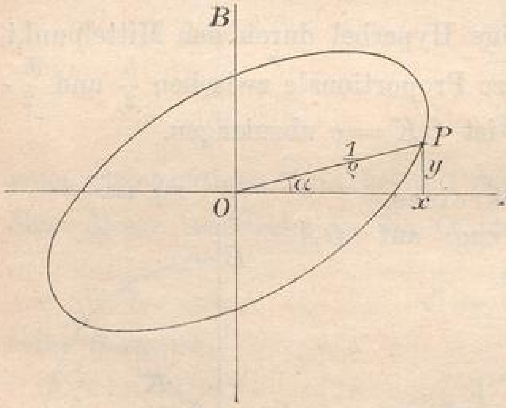
$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \cos^2\alpha + \varrho_2^2 \sin^2\alpha - 2c^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Dafür kann man schreiben

$$1 = \frac{\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2} - \frac{2\,\frac{\sin\alpha}{\varrho}\,\frac{\cos\alpha}{\varrho}}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}.$$

Diese Gleichung läfst sich geometrisch veranschaulichen. Man setze die veränderliche, von α abhängige Gröfse $\frac{\cos\alpha}{\varrho} = x$ und $\frac{\sin\alpha}{\varrho} = y$.

Fig. 110.



Dies sind dann die Koordinaten eines Punktes P, für den $OP = \frac{1}{\varrho}$ und $\sphericalangle POA = \alpha$ ist. Setzt man aufserdem die Konstanten $\frac{1}{\varrho_1} = a_1$ und $\frac{1}{\varrho_2} = b_1$, so geht die obige Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{2xy}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} = 1.$$

Bildet man also für jeden Winkel α den Trägheitsradius ϱ und seinen umgekehrten Werth $\frac{1}{\varrho}$, und trägt man den letzteren auf dem freien Schenkel von α ab, so bilden die Endpunkte P die durch die letzte Gleichung dargestellte Kurve.

Diese ist vom zweiten Grade, also Gleichung eines Kegelschnitts. Vertauscht man in der Gleichung $+x$ mit $-x$ und zugleich $+y$ mit $-y$, so ändert sie sich nicht, folglich ist sie eine Mittelpunktsgleichung, und O ist Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da ferner das Trägheitsmoment der Fläche für keine durch O gehende Achse verschwinden kann (denn $\sum f\xi^2$ besteht aus lauter positiven Teilen), so kann $\frac{1}{\varrho}$ für keine durch O gehende Achse unendlich grofs werden. Der Kegelschnitt ist demnach eine Ellipse. Also:

Berechnet man die reciproken Werte der Trägheitsmomente einer Fläche F für sämtliche durch einen Punkt O gehenden Achsen, und trägt man diese Werte auf den Achsen ab, so bilden die Endpunkte eine Ellipse.

Diese ist die sogenannte Trägheitsellipse.

(Hätte man nicht die reciproken Werte, sondern die ϱ selbst abgetragen, so hätte man die reciproke Kurve der Ellipse, eine gewisse Kurve 4[ten] Grades erhalten, die der allgemeinen Anschauung weniger geläufig ist.)

Hat man die Hauptachsen dieser Ellipse, so kennt man alle ihre Durchmesser, folglich auch die reciproken Werthe der Trägheitsmomente für sämtliche Achsen, folglich auch die Trägheitsmomente selbst. Man hat also eine sehr einfache graphische Darstellung. Gleichzeitig aber lassen sich sofort zahlreiche wichtige Folgerungen ablesen.

131) **Folgerungen.**

a) Die Ellipse hat einen gröfsten und einen kleinsten Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen. Dem ersteren entspricht das Minimum, dem letzteren das Maximum des Trägheitsmomentes. Die Minimal- und Maximalachse stehen also auf einander senkrecht.

Man bezeichnet beide als die Hauptträgheitsachsen der Fläche für den betreffenden Punkt O.

b) Je zwei Ellipsendurchmesser, die symmetrisch gegen die beiden Hauptachsen liegen, sind einander gleich. Folglich: Symmetrisch gegen die Hauptachsen liegenden Achsen entsprechen gleiche Trägheitsmomente.

c) Von den so zusammengehörigen Durchmesserpaaren bildet nur eines einen rechten Winkel, das den Winkel der Hauptachsen halbierende. Folglich: Sind die Trägheitsmomente in Bezug auf zwei durch O gehende und aufeinander senkrecht stehende Achsen einander gleich, so findet man durch Halbierung der Schnittwinkel der letzteren die Haupt-