Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Folgerungen dieses Satzes (Hauptachsen und Gleichheitsachsen).

Diese ist vom zweiten Grade, also Gleichung eines Kegelschnitts. Vertauscht man in der Gleichung $+x$ mit $-x$ und zugleich $+y$ mit $-y$, so ändert sie sich nicht, folglich ist sie eine Mittelpunktsgleichung, und O ist Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da ferner das Trägheitsmoment der Fläche für keine durch O gehende Achse verschwinden kann (denn $\sum f\xi^2$ besteht aus lauter positiven Teilen), so kann $\frac{1}{\varrho}$ für keine durch O gehende Achse unendlich grofs werden. Der Kegelschnitt ist demnach eine Ellipse. Also:

Berechnet man die reciproken Werte der Trägheitsmomente einer Fläche F für sämtliche durch einen Punkt O gehenden Achsen, und trägt man diese Werte auf den Achsen ab, so bilden die Endpunkte eine Ellipse.

Diese ist die sogenannte Trägheitsellipse.

(Hätte man nicht die reciproken Werte, sondern die ϱ selbst abgetragen, so hätte man die reciproke Kurve der Ellipse, eine gewisse Kurve 4ten Grades erhalten, die der allgemeinen Anschauung weniger geläufig ist.)

Hat man die Hauptachsen dieser Ellipse, so kennt man alle ihre Durchmesser, folglich auch die reciproken Werthe der Trägheitsmomente für sämtliche Achsen, folglich auch die Trägheitsmomente selbst. Man hat also eine sehr einfache graphische Darstellung. Gleichzeitig aber lassen sich sofort zahlreiche wichtige Folgerungen ablesen.

131) **Folgerungen.**

a) Die Ellipse hat einen gröfsten und einen kleinsten Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen. Dem ersteren entspricht das Minimum, dem letzteren das Maximum des Trägheitsmomentes. Die Minimal- und Maximalachse stehen also auf einander senkrecht.

Man bezeichnet beide als die Hauptträgheitsachsen der Fläche für den betreffenden Punkt O.

b) Je zwei Ellipsendurchmesser, die symmetrisch gegen die beiden Hauptachsen liegen, sind einander gleich. Folglich: Symmetrisch gegen die Hauptachsen liegenden Achsen entsprechen gleiche Trägheitsmomente.

c) Von den so zusammengehörigen Durchmesserpaaren bildet nur eines einen rechten Winkel, das den Winkel der Hauptachsen halbierende. Folglich: Sind die Trägheitsmomente in Bezug auf zwei durch O gehende und aufeinander senkrecht stehende Achsen einander gleich, so findet man durch Halbierung der Schnittwinkel der letzteren die Haupt-

6*

trägheitsachsen. Der Kürze halber sollen die Achsen der gleichen Trägheitsmomente als Gleichheitsachsen bezeichnet werden.

d) Sind mehr als zwei Ellipsendurchmesser einander gleich, so ist die Ellipse ein Kreis. Folglich: Stimmen die Trägheitsmomente in Bezug auf mehr als zwei durch O gehende Achsen überein, so stimmen sie für sämtliche überein. (Später wird sich zeigen, dafs für jede beliebig gestaltete ebene Fläche zwei Punkte existieren, für deren Strahlenbüschel sämtliche Trägheitsmomente der Fläche übereinstimmen. Dies sind die sogenannten Fixpunkte.)

e) Ist eine der durch O gehenden Achsen Symmetrieachse der Fläche F, so ist sie auch Symmetrieachse der Trägheitsellipse. Folglich: Eine Symmetrieachse einer Fläche ist stets eine der Hauptachsen der Trägheitsellipse, also liegt entweder der Fall des Maximums, oder der des Minimums vor. Gerade dieser Umstand erspart zahlreiche Rechnungen.

f) Die Summe zweier Trägheitsmomente für auf einander senkrechte Achsen ist konstant, nämlich gleich dem zugehörigen Polarmomente. Folglich mufs für die Ellipse folgender Satz existieren: Die Summe der Quadrate der reciproken Werte für je zwei auf einander senkrechte Halbmesser der Ellipse ist konstant, nämlich gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

132) Die Centralellipse. Die dem Schwerpunkte einer Fläche entsprechende Ellipse heifst die Centralellipse. Sie ist von besonderer Wichtigkeit, weil von ihr aus alle anderen Trägheitsmomente durch Verschiebung ($T_1 = T + e^2 F$) gefunden werden können.

Auch von ihr gelten die letzten Symmetriebemerkungen.

Von besonderer Wichtigkeit ist folgendes:

Hat eine Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centralellipse ein Kreis.

In diesem Falle braucht man also nur ein einziges Trägheitsmoment wirklich zu berechnen. Dies gilt nicht nur von den regelmäfsigen Polygonen, sondern auch von zahlreichen anderen ebenen Gebilden, die für die Technik wichtig sind. Hierher gehören z. B. die Kreuzquerschnitte und die Schnitte gewisser Säulen und Flügelachsen. Davon wurde im Abschnitt 65 Gebrauch gemacht.

Für die Biegungs- und Strebfestigkeit lassen sich daraus sofort wichtige Folgerungen ablesen. Für die erstere ist der Ausdruck $\frac{T}{a}$ mafsgebend, wo a die Entfernung der äufsersten Fasern von der