UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

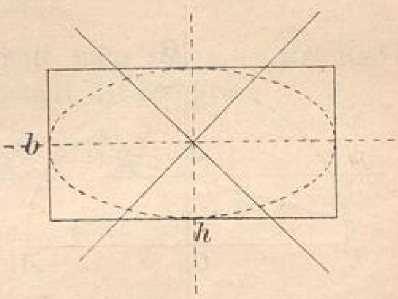
Rechteck, Halbkreis, gleichschenkliges Winkeleisen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Visual Library

moment $\frac{hb^3}{12}$, die Trägheitsradien sind $\varrho_2 = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$ und $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$, die reciproken Werthe sind $a_1 = \frac{\sqrt{12}}{b}$, $b_1 = \frac{\sqrt{12}}{h}$, so dafs $a_1 : b_1 = \frac{1}{b} : \frac{1}{h} = h : b$. Die einbeschriebene Hauptellipse ist also der Centralellipse ähnlich. Um letztere im richtigen Mafsstabe zu erhalten, würde es der Feststellung einer Einheit bedürfen, wovon jetzt abgesehen werden soll. Für die schrägen Gleichheitsachsen ist

Fig. 113.



$$T_\xi = \frac{T_x + T_y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12}\right)$$
$$= \frac{bh}{24}(b^2 + h^2) = \frac{F}{24}d^2,$$

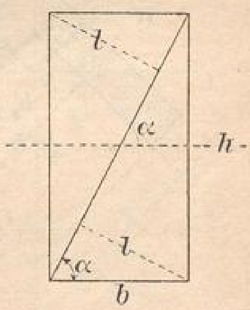
wo F die Fläche des Rechtecks, d seine Diagonale ist.

(Bei Millimetermafs fallen für die gebräuchlichen Querschnitte die Halbachsen äufserst klein aus. Wäre z. B. $h = 100$ mm, so würde $a = \frac{\sqrt{12}}{100}$ kaum sichtbar sein.

Ist allgemeiner die Länge 1 gegeben, und hat man $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$ gezeichnet, so findet man $a_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ mit Hülfe der Proportion $\varrho_1 : 1 = 1 : a_1$. Ebenso ist es mit $\varrho_2 = \frac{h}{\sqrt{12}}$ und $\varrho_2 : 1 = 1 : b_1$.)

136) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Diagonale d?

Fig. 114.



Auflösung. Aus

$$T_\xi = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha$$

folgt, da

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{d}$$

und

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

ist,

$$T_\xi = \frac{bh^3}{12}\frac{b^2}{d^2} + \frac{hb^3}{12}\frac{h^2}{d^2} = \frac{b^3h^3}{6\,d^2} = \frac{b^3h^3}{6\,(b^2 + h^2)},$$

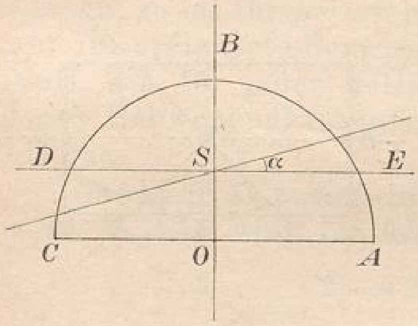
was auch mit Hülfe des Dreiecks gefunden werden konnte. [Jedes Diagonaldreieck giebt $\frac{dl^3}{12}$, die Gesamtfigur also $\frac{dl^3}{6}$. Nun ist aber

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$dl = bh$, also $l = \frac{bh}{d}$, folglich $T_\xi = \frac{d}{6}\frac{b^3h^3}{d^3} = \frac{b^3h^3}{6\,d^2}.]$ Kommt es auf gröfsere Genauigkeit nicht an, so kann man das Resultat an Fig. 113 ablesen.

137) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Halbkreises für beliebige Schwerpunktsachsen?

Fig. 115.



In Bezug auf DE ist nach 68)

$$T_x = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) = r^4\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\,\pi^2}\right).$$

In Bezug auf OB ist

$$T_y = \frac{r^4\pi}{8},$$

folglich für die unter α geneigte Schwerpunktsachse

$$T_\xi = r^4\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\,\pi^2}\right)\cos^2\alpha + \frac{r^4\pi}{8}\sin^2\alpha.$$

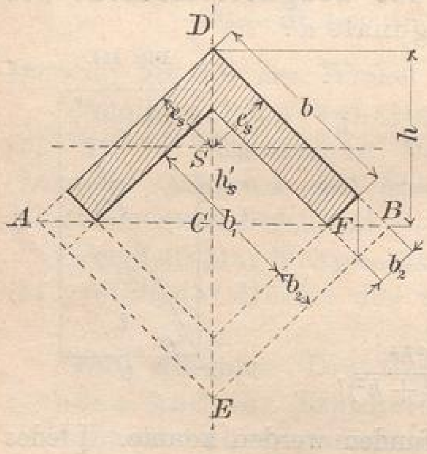
Für $\alpha = 45^0$ erhält man z. B.

$$T_\xi = \frac{r^4\pi}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{8}{9\,\pi^2}\right].$$

T_y ist das Maximal-, T_x das Minimalmoment, die Centralellipse hat also ihre Brennpunkte auf DE; BO ist also die günstigere Biegungsachse für die Festigkeit.

138) Beispiel des symmetrischen Winkeleisens.

Fig. 116.



Es war in Nr. 59)

$$T_x = \frac{1}{24}\left[\left(b_1 + b_2\right)^4 - b_1^4 - 2\,b_2^4\right] - h_s'^2\left(b^2 - b_1^2\right),$$

$$T_y = \frac{(b + b_2)^4 - b_1^4}{12} - 2\left[\frac{b_2^4}{12} + \frac{1}{2}\left(b_1 + b_2\right)^2 b_2^2\right].$$

Dies sind die Grenzmomente, denn die Winkelhalbierenden geben Gleichheitsachsen. Für diese ist demnach

$$T_\xi = \frac{T_x + T_y}{2},$$

wodurch sich das Resultat 58) bei Fig. 64 bestätigen mufs.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

139) Ausgang von den Gleichheitsachsen.

Für die Gleichheitsachsen ist $T_x = T_y$, wofür der Gleichheit halber T_g geschrieben werden soll. Für die Achse, die um α gegen die x-Achse gedreht ist, gilt jetzt nach Nr. 109 die Gleichung

$$T_\xi = T_g \cos^2 \alpha + T_g \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$
$$= T_g (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha\, M_{xy},$$

folglich

$$T_\xi = T_g - \sin 2\alpha\, M_{xy}.$$

Nimmt man M_{xy} als positiv an, so erhält man für $\alpha = 45^0$ und $\alpha = -45^0$ das Minimal- und Maximalmoment in der Form

$$T_1 = T_g - M_{xy}, \quad T_2 = T_g + M_{xy}.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion

$$M_{xy} = \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Folglich: Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Gleichheitsachsen ist gleich der halben Differenz der beiden Grenzmomente.

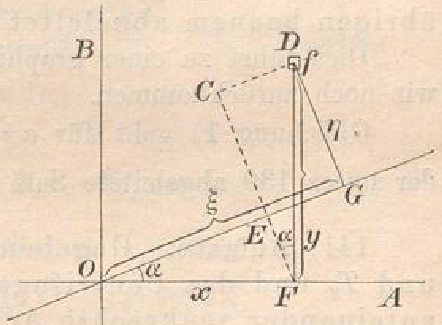
Namentlich bei einfach symmetrischen Querschnitten giebt dies mancherlei Rechnungserleichterungen. Für das vorige Beispiel z. B. ergiebt sich für die Gleichheitsachsen (abgesehen vom Vorzeichen)

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2}.$$

140) Drehung der Achse des Centrifugalmomentes.

In beistehender Figur ist

Fig. 117.



$$\xi = OE + CD = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$
$$\eta = FC - FE = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

also

$$\xi\eta = xy \cos^2 \alpha - xy \sin^2 \alpha$$
$$+ y^2 \sin \alpha \cos \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

folglich

$$\sum f\xi\eta = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum fxy + \sin \alpha \cos \alpha \left[\sum fy^2 - \sum fx^2\right],$$

oder

$$1) \qquad M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha\, M_{xy} + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha\, (T_x - T_y).$$

Kennt man also das Centrifugalmoment und die beiden Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte