Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Bestimmung der Hauptträgheitsachsen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Achsen, so erhält man durch Gleichung 1) das Centrifugalmoment für die um α gedrehte Achse.

Danach wird $M_{\xi\eta} = 0$ für

$$\tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \, (T_y - T_x) = \cos 2\alpha \, M_{xy}$$

oder für

2) $$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Richtungen für die beiden Hauptachsen ergeben.

Geht man umgekehrt von den Hauptachsen aus, für die $M_{xy} = 0$ ist, so vereinfacht sich Gleichung 1) zu

3) $$M_{\xi\eta} = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \, (T_1 - T_2),$$

wo T_1 und T_2 Grenzmomente sind. Den Maximalwert hat man bei den Achsenrichtungen $\alpha = \pm 45^0$, nämlich

4) $$M_{\xi\eta} = \frac{T_1 - T_2}{2},$$

so dafs der Maximalwert des Centrifugalmomentes den Gleichheitsachsen angehört und daher auf einer der Hauptachsen graphisch darzustellen ist.

Geht man von den Gleichheitsachsen aus, so erhält man aus 1) die Gleichung

5) $$M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha \, M_{xy},$$

so dafs aus dem maximalen Centrifugalmoment $\frac{T_1 - T_2}{2}$ alle übrigen bequem abgeleitet werden können.

Dies führt zu einer graphischen Darstellung aller Werte, auf die wir noch zurückkommen.

Gleichung 1) geht für $\alpha = 45^0$ über in $M_{\xi\eta} = \frac{T_x - T_y}{2}$, worin der unter 139 abgeleitete Satz als besonderer Fall enthalten ist.

141) **Aufgabe.** Gegeben seien die Trägheitsmomente T_x und T_y und das Centrifugalmoment M_{xy} in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen. Die Hauptträgheitsachsen sollen bestimmt und die Grenzwerte des Trägheitsmomentes sollen berechnet werden.

Auflösung. Man erhält die Hauptachsen, wenn $M_{\xi\eta} = 0$ wird, also nach vorigem Abschnitt für

1) $$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Winkel α_1 und $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$ ergeben.

Diese Werte sind in die Bestimmungsgleichung

2) $$T_\xi = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

einzusetzen, und so erhält man die beiden Grenzwerte.

Um jedoch nicht verschiedene Winkel α und 2α in der Formel zu haben und um statt der verschiedenen Funktionen nur eine zu erhalten, setze man nach bekannten Formeln

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

und schreibe Gleichung 1) in der Form

1*) $$\sin 2\alpha = \frac{2 M_{xy} \cos 2\alpha}{T_y - T_x}.$$

Dadurch geht 2) über in

$$T_\xi = T_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + T_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{2 M_{xy}^2 \cos 2\alpha}{T_y - T_x}$$

oder in

$$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha - \frac{2 M_{xy}^2 \cos 2\alpha}{T_y - T_x}$$

oder in

$$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha\left[1 + \frac{4 M_{xy}^2}{(T_y - T_x)^2}\right]$$

oder unter Benutzung von Gleichung 1)

$$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha\,[1 + \tan^2 2\alpha].$$

Die beiden letzten Faktoren formen sich um zu

$$\cos 2\alpha\left[1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right] = \cos 2\alpha \frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \cos 2\alpha \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$$
$$= \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha,$$

so dafs wird

3) $$T_\xi = \tfrac{1}{2}(T_x + T_y) + \tfrac{1}{2}(T_x - T_y)\sec 2\alpha.$$

Setzt man $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$ ein, so erhält man

4) $$T_\eta = \tfrac{1}{2}(T_x + T_y) - \tfrac{1}{2}(T_x - T_y)\sec 2\alpha.$$

D u r c h 3) u n d 4) f i n d e t m a n d i e G r e n z w e r t e d e s T r ä g h e i t s m o m e n t e s, d e n H ü l f s w i n k e l α m i t t e l s t d e r G l e i c h u n g 1*). Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Auf dasselbe Resultat führt die später zu behandelnde Maximal- und Minimal-Methode. Damit ist eine der wichtigsten Aufgaben der Festigkeitslehre gelöst, denn an der Trägheitsellipse erkennt man z. B. sofort, dafs ein auf Strebfestigkeit beanspruchter Stab senkrecht gegen die kleine Achse standhält, in ihrer Richtung aber biegend nachgiebt.

142) Die Curve der Radien des Centrifugalmomentes.

In Nr. 140 war zur Berechnung des Centrifugalmomentes für die um α gedrehten Achsen folgende Formel angewandt:

$$1)\qquad M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha\, M_{xy} + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha\,(T_y - T_x).$$

Führt man die Radien der Momente durch die Gleichungen

$$F\lambda^2 = M_{\xi\eta},\quad F\lambda_1^2 = M_{xy},\quad F\varrho_1^2 = T_x,\quad F\varrho_2^2 = T_y$$

ein und dividiert man beiderseits durch F, so entsteht die Gleichung

$$2)\qquad \lambda^2 = \lambda_1^2 \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) \sin 2\alpha.$$

Sind hier T_x und T_y die beiden Grenzmomente, sind also die Achsen die Hauptachsen, so ist $M_{xy} = 0$, also auch $\lambda_1 = 0$, die Gleichung vereinfacht sich also zu

$$3)\qquad \lambda^2 = \tfrac{1}{2}\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) \sin 2\alpha.$$

Hier seien die Benennungen wieder so gewählt, daſs $\varrho_2 > \varrho_1$ ist. Dann bilde man

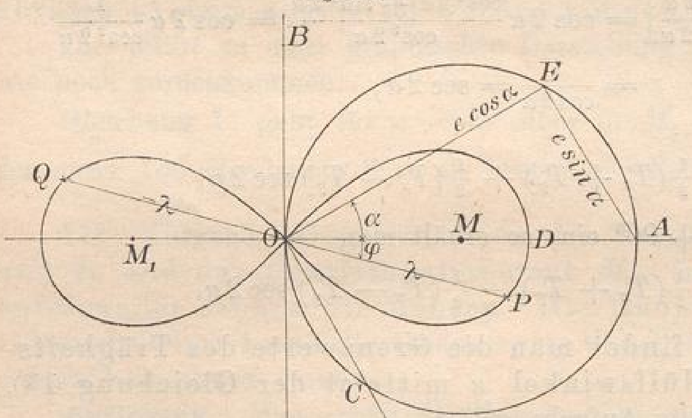
$$4)\qquad \varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2,$$

so daſs sich ergiebt

$$5)\qquad \lambda^2 = \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = (e \sin\alpha)\,(e \cos\alpha),$$

so daſs λ mittlere Proportionale zwischen $e \sin\alpha$ und $e \cos\alpha$ ist.

Fig. 118.



Dies führt zu folgender Konstruktion für den Radius des Centrifugalmomentes für gegebenen Winkel α und $\alpha - 90^0$ und bei gegebenem Maximal-Radius ϱ_1 und Minimal-Radius ϱ_2.

Man bilde $OA = e = \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}$ und schlage den zu OA als Durchmesser gehörigen Kreis, ziehe die Sehnen OE und OC unter α^0 und $\alpha^0 - 90^0$ Neigung und verbinde E mit A. Zu $AE = e \sin\alpha$ und $OE = e \cos\alpha$ bilde man die mittlere Proportionale