



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Lemniskate des Centrifugalmoments.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

λ und trage sie von O aus als Halbierende OP des Winkels EOC ein. Dann ist OP der Radius des gesuchten Centrifugalmomentes.

Bezeichnet man den Winkel AOP mit φ , so ist $\varphi = \alpha - 45^\circ$, also $\alpha = \varphi + 45^\circ$, so daß Gleichung 3) übergeht in

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin(2\varphi + 90^\circ) = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \sin(90^\circ - 2\varphi)$$

oder in

$$6) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \cos 2\varphi = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi.$$

Da jetzt λ und φ zusammengehören, was bei λ und α nicht der Fall war, so kann man 6) als Gleichung der gesuchten Kurve in Polarkoordinaten betrachten.

In Gleichung 6) liegt aber eine neuere und einfachere Konstruktion für den Radius λ des Centrifugalmomentes.

Man zeichne denselben Kreis wie vorher und trage $MOC = 2\varphi$ ein. Als Winkelhalbierende trage man die mittlere Proportionale zwischen OM und OC ein, was $OP = \lambda$ giebt. Dies ist der Radius des Centrifugalmomentes für die beiden unter $\pm 45^\circ$ gegen OP geneigten Achsen.

Beweis. Nach der Konstruktion ist

$$OM : OP = OP : OC,$$

also

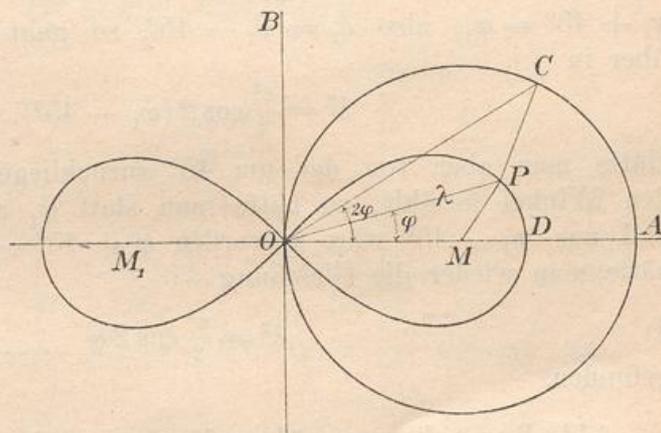
$$OP^2 = OM \cdot OC = OM \cdot OA \cos 2\varphi = \frac{e}{2} (e \cos 2\varphi) = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi.$$

Dies stimmt mit der Gleichung 6) überein.

Man achte auf die Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und OMC . Das in dieser Konstruktion liegende Abbildungsprinzip wird uns noch mehrfach beschäftigen.

Trägt man OP auch in entgegengesetzter Richtung ab, was der Gleichung $c = \pm \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}$ entspricht, so bilden die Endpunkte aller so konstruierten Radien OP eine schleifenförmige Kurve, die sogenannte

Fig. 119.



Lemniskate, genauer bezeichnet, die gleichseitige Lemniskate, über die später eingehender zu sprechen sein wird.

143) Dasselbe Resultat hätte man gefunden, wenn man von den Gleichheitsachsen ausgegangen wäre. Für diese geht, da für sie $T_x = T_y$, also $\varrho_1 = \varrho_2$ ist, Gleichung 2) über in

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 \cos 2\alpha_1 = \frac{e^2}{2} \cos 2\alpha_1,$$

denn jetzt ist λ_1^2 gleich dem Maximalwerte $\frac{e^2}{2}$, also $\lambda_1 = e\sqrt{\frac{1}{2}} = OD$ in Fig. 119 und λ wäre aufzutragen gewesen auf die Gerade, die den Winkel zwischen α_1 und $\alpha_1 + 90^\circ$, die also mit der einen Gleichheitsachse den Winkel $\frac{\alpha_1 + (\alpha_1 + 90^\circ)}{2} = \alpha_1 + 45^\circ$ bildet. Setzt man $\alpha_1 + 45^\circ = \varphi_1$, also $\alpha_1 = \varphi_1 - 45^\circ$, so geht die Gleichung für λ über in

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2(\varphi_1 - 45^\circ).$$

Hätte man aber von der um 45° zurückliegenden Hauptachse aus den Winkel gezählt, so hätte man statt φ_1 zu schreiben $\varphi + 45^\circ$ und aus $\varphi_1 - 45^\circ$ wäre geworden $\varphi + 45^\circ - 45^\circ = \varphi$. Demnach hätte man wieder die Gleichung

$$6) \quad \lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi$$

gefunden.

144) Bemerkungen über die Lemniskate des Centrifugalmomentes.

OA und OB sind die Hauptachsen der Trägheitsellipse. Da $\varrho_2 > \varrho_1$ angenommen war, ist $\frac{1}{\varrho_2} < \frac{1}{\varrho_1}$, d. h. die große Achse der Trägheitsellipse fällt in die Richtung OA , die kleine in die Richtung OB . Man bezeichnet die Punkte M und M_1 als Brennpunkte der Lemniskate. Für $\varphi = 0$ ist $\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 0 = \frac{e^2}{2}$, dies giebt den Maximalwert $OD = e\sqrt{\frac{1}{2}} = OA\sqrt{\frac{1}{2}}$ für den Radius des Centrifugalmomentes. Für $\varphi = \pm 45^\circ$ erhält man

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Demnach geben die Richtungen $\pm 45^\circ$ unendlich kleine Sehnen, d. h. Tangenten. Im Punkte O haben also die Tangenten der Lemniskate die Richtungen $\pm 45^\circ$. Es verhält sich

$$OM : OD = \frac{e}{2} : \frac{e}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}.$$

Durch Gleichung 6) war die Lemniskate in Polarkoordinaten dargestellt. In gewöhnlichen Koordinaten würde sie folgendermaßen zu bilden sein. Es ist

$$x^2 + y^2 = \lambda^2, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\lambda} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Gleichung 6) geht aber über in

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2 x^2 - y^2}{2 x^2 + y^2}$$

oder in

$$7) \quad (x^2 + y^2)^2 = \frac{e^2}{2} (x^2 - y^2).$$

Fig. 120.

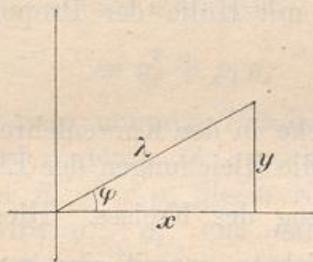
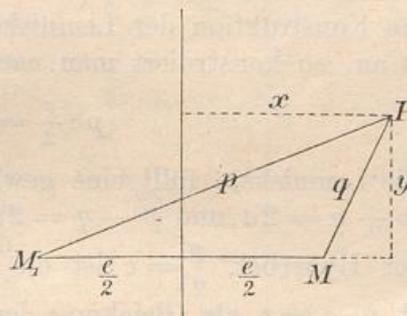


Fig. 121.



Die Haupteigenschaft der Curve ergibt sich aus Folgendem:
Man verbinde einen Lemniskatenpunkt P mit M und M_1 , dann ist

$$p^2 = \left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$q^2 = \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2,$$

folglich

$$\begin{aligned} p^2 q^2 &= \left[\left(x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}\right) + ex\right] \cdot \left[\left(x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}\right) - ex\right] \\ &= \left(x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}\right)^2 - e^2 x^2 \end{aligned}$$

oder

$$p^2 q^2 = (x^2 + y^2)^2 + \frac{e^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{e^4}{16} - e^2 x^2.$$

Nach Gleichung 7) ist aber für die Lemniskatenpunkte

$$0 = (x^2 + y^2)^2 - \frac{e^2}{2} (x^2 - y^2).$$

Durch Subtraktion folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$p^2 q^2 = e^2 x^2 + \frac{e^4}{16} - e^2 x^2 = \frac{e^4}{16},$$

also ist

$$8) \quad pq = \frac{e^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Das Produkt der „Brennstrahlen“ einer Lemniskate ist also eine konstante Gröfse.

Ist λ_m der Maximalbetrag für den Radius des Centrifugalmomentes, so ist $\lambda_m = e\sqrt{\frac{1}{2}}$, man kann also auch schreiben

$$pq = \frac{(\lambda_m \sqrt{2})^2}{4} = \frac{\lambda_m^2}{2}.$$

Aus der Eigenschaft 8), welche die Lemniskate als besonderen Fall der Cassinischen Kurven $pq = a^2$ erscheinen läßt, folgt eine weitere einfache Konstruktion der Lemniskate. Nimmt man nämlich p willkürlich an, so konstruiert man nach 8) q mit Hülfe der Proportion

$$p : \frac{e}{2} = \frac{e}{2} : q.$$

Die Lemniskate füllt eine gewisse Lücke in der Kurvenlehre aus, denn $p + q = 2a$ und $p - q = 2a$ sind die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel, $\frac{p}{q} = c$ ist die Gleichung des Kreises. Hier erscheint $p \cdot q = c$ als Gleichung der Lemniskate, womit eine gewisse Gruppe von Kurven abgeschlossen ist. — Später soll näher auf diese Kurve eingegangen werden.

145) Die Fixpunkte oder die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenachsen seien die Achsen kleinsten und größten Trägheitsmomentes T_x und T_y . Auf der Y -Achse trage man die Entfernungen SC_1 und SC_2 gleich $\sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} = \pm e$ ab. Dann wird behauptet, C_1 und C_2 seien für die beliebig gestaltete Fläche F die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Beweis. Für jede Achse, die mit der Hauptachse X den Winkel α bildet, ist, da für die Hauptachse $M_{xy} = 0$ ist, nach Nr. 133

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha,$$

also ist für die parallele um p entfernte Achse KL nach dem Verschiebungssatze (wo F sich weghebt)

$$\varrho^2 = \varrho_\alpha^2 + p^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + p^2.$$