Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die Fixpunkte oder Punkte konstanten Trägheitsmoments.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Durch Subtraktion folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$p^2q^2 = e^2x^2 + \frac{e^4}{16} - e^2x^2 = \frac{e^4}{16},$$

also ist

8) $$pq = \frac{e^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Das Produkt der „Brennstrahlen“ einer Lemniskate ist also eine konstante Gröfse.

Ist λ_m der Maximalbetrag für den Radius des Centrifugalmomentes, so ist $\lambda_m = e\sqrt{\frac{1}{2}}$, man kann also auch schreiben

$$pq = \frac{(\lambda_m\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\lambda_m^2}{2}.$$

Aus der Eigenschaft 8), welche die Lemniskate als besonderen Fall der Cassinischen Kurven $pq = a^2$ erscheinen läfst, folgt eine weitere einfache Konstruktion der Lemniskate. Nimmt man nämlich p willkürlich an, so konstruiert man nach 8) q mit Hülfe der Proportion

$$p : \frac{e}{2} = \frac{e}{2} : q.$$

Die Lemniskate füllt eine gewisse Lücke in der Kurvenlehre aus, denn $p + q = 2a$ und $p - q = 2a$ sind die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel, $\frac{p}{q} = c$ ist die Gleichung des Kreises. Hier erscheint $p \cdot q = c$ als Gleichung der Lemniskate, womit eine gewisse Gruppe von Kurven abgeschlossen ist. — Später soll näher auf diese Kurve eingegangen werden.

145) Die Fixpunkte oder die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Die durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenachsen seien die Achsen kleinsten und gröfsten Trägheitsmomentes T_x und T_y. Auf der Y-Achse trage man die Entfernungen SC_1 und SC_2 gleich $\sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} = \pm e$ ab. Dann wird behauptet, C_1 und C_2 seien für die beliebig gestaltete Fläche F die Punkte konstanten Trägheitsmomentes.

Beweis. Für jede Achse, die mit der Hauptachse X den Winkel α bildet, ist, da für die Hauptachse $M_{xy} = 0$ ist, nach Nr. 133

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha,$$

also ist für die parallele um p entfernte Achse KL nach dem Verschiebungssatze (wo F sich weghebt)

$$\varrho^2 = \varrho_\alpha^2 + p^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha + p^2.$$

Sind nun p_1 und p_2 die von C_1 und C_2 auf die neue Achse gefällten Lote, so ist

$$p_1 = p - e\cos\alpha, \quad p_2 = p + e\cos\alpha,$$

folglich

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2\cos^2\alpha,$$

folglich

$$p^2 = p_1 p_2 + e^2\cos^2\alpha$$
$$= p_1 p_2 + \left(\varrho_1^2 - \varrho_2^2\right)\cos^2\alpha,$$

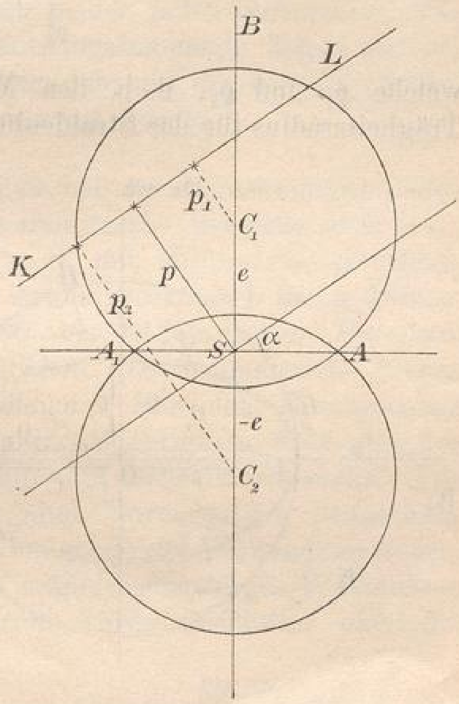
und demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2\sin^2\alpha + \varrho_1^2\cos^2\alpha$$
$$+ p_1 p_2 + \varrho_2^2\cos^2\alpha - \varrho_1^2\cos^2\alpha$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_2^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + p_1 p_2$$
$$= \varrho_2^2 + p_1 p_2 .$$

Fig. 122.



Legt man nun die Parallele durch C_1 oder durch C_2, so wird entweder p_1 oder p_2 gleich Null, d. h. es wird $\varrho = \varrho_2$, und dabei ist α ganz gleichgiltig.

Folglich: Legt man durch die Fixpunkte C_1 und C_2 beliebig gerichtete Achsen, so ist für sämtliche das Trägheitsmoment gleich grofs und ergiebt sich aus dem Radius ϱ_2 des maximalen Trägheitsmomentes.

Für beide Fixpunkte gehen also die Trägheitsellipsen in Kreise über.

Kennt man die Lage der Fixpunkte, so berechnet sich das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse der Ebenen mit Hülfe der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 + p_1 p_2 ,$$

wo p_1 und p_2 die Entfernungen der Geraden von den Fixpunkten sind.

(Der zweite Posten ist positiv, wenn p_1 und p_2 gleichgerichtet sind, negativ bei entgegengesetzter Richtung.)

Der grofse Vorteil liegt darin, dafs jetzt goniometrische Funktionen überflüssig sind, und dafs auch graphisch verfahren werden kann.