Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

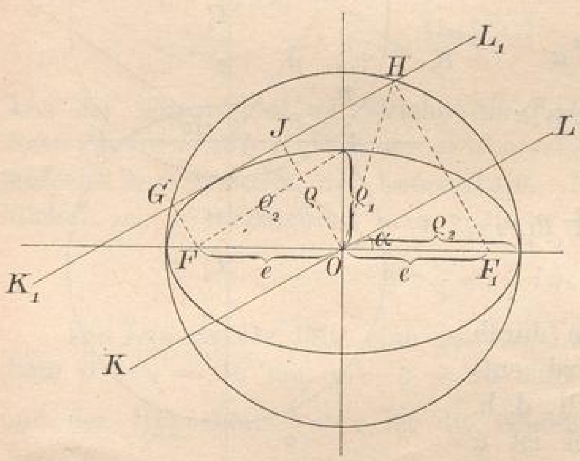
Die Culmannsche Trägheitsellipse.

146) Die Culmansche Trägheitsellipse. Es sei erwähnt, dafs im Anschlufs an Clebsch durch Culmann eine zweite Trägheitsellipse eingeführt worden ist, deren bisher absichtlich nicht gedacht wurde. Es handelt sich um die Ellipse

$$\frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2} = 1,$$

welche ϱ_1 und ϱ_2, d. h. den Maximal- und den Minimalwert des Trägheitsradius für das Strahlenbüschel durch einen beliebigen Punkt O zu Achsen hat.

Fig. 123.



Ihre Bedeutung ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

In Fig. 123 ist ein Kreis mit Radius ϱ_2 und die Culmannsche Ellipse für einen beliebigen Punkt O der Ebene gezeichnet. Durch O ist eine beliebige Gerade KL mit Neigung α gezeichnet. Legt man durch die mittels $e = \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}$ konstruierten Brennpunkte F und F_1 Senkrechte zu ihr, so geben die Schnitte G und H mit dem Kreise bekanntlich eine Tangente der Ellipse. (Vergl. Meth. Lehrbuch II, Ster. 14.) Es wird behauptet, OJ sei der Trägheitsradius für KL.

Beweis:

$$\begin{aligned} OJ^2 = OH^2 - JH^2 &= \varrho_2^2 - (OF_1 \cdot \cos\alpha)^2 = \varrho_2^2 - e^2\cos^2\alpha \\ &= \varrho_2^2 - \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right)\cos^2\alpha = \varrho_2^2\,(1 - \cos^2\alpha) + \varrho_1^2\cos^2\alpha \\ &= \varrho_2^2\sin^2\alpha + \varrho_1^2\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Es ist aber auch für die unter α geneigte Gerade nach Nr. 133

$$\varrho^2 = \varrho_2^2\sin^2\alpha + \varrho_1^2\cos^2\alpha,$$

also ist $OJ^2 = \varrho^2$ und $OJ = \varrho$.

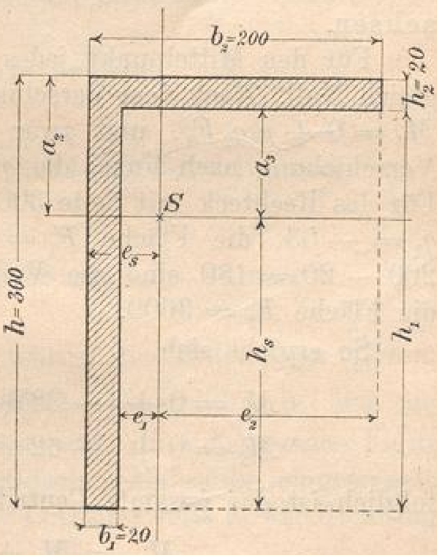
Folglich: Berechnet man für jede durch O gehende Gerade das Trägheitsmoment der Fläche F, und zieht man für jede eine Parallele in dem berechneten Abstande, so umhüllen die Parallelen die Culmannsche Trägheitsellipse.

Diese Ellipse ist namentlich in graphischer Hinsicht von Wichtigkeit, und sie wird hier nur vorläufig erwähnt, um Verwechselungen vorzubeugen. Ist O der Schwerpunkt S, so hat man die Culmannsche Centralellipse.

Die Culmannsche Trägheitsellipse ist ähnlich und ähnlich liegend zur ersten Ellipse. Die Mittelpunkte beider fallen zusammen. Die Brennpunkte der Lemniskate des Centrifugalmoments liegen auf der groſsen Achse beider Ellipsen, die Fixpunkte auf der kleinen. Später soll die zweite Ellipse eingehend behandelt werden.

147) Um zu erkennen, auf was es bei den Berechnungen dieses Kapitels ankommt, muſs man einige numerische Beispiele nach jeder Richtung hin durchrechnen. Wird z. B. mit Millimetern gerechnet, so nimmt die Trägheitsellipse erster Art mikroskopisch kleine Dimensionen an, so daſs man sie in 1000- bis 10 000-fachem Maſsstabe zeichnen muſs, um sie zu veranschaulichen. Die Culmannsche Ellipse dagegen erhält brauchbare Dimensionen. Für den Maschinenbau sind solche Berechnungen von geringerer Wichtigkeit, wohl aber für die Eisenkonstruktionen des Hochbau- und Brückenbauwesens. Für die dort auftretenden Querschnitte sind Normalprofile festgestellt. Jedes derselben kann als lehrreiches Übungsbeispiel Verwendung finden. Im nachstehenden Abschnitte ist ein ungleichschenkliges Winkeleisen numerisch behandelt. Ein Normalprofil wurde absichtlich nicht genommen, um gewisse Eigentümlichkeiten schärfer hervortreten zu lassen.

Fig. 124.



Abgesehen von der rein praktischen Verwertung für die Festigkeitslehre lassen sich aber viele physikalische Betrachtungen über die Theorie der Drehung, der Centrifugalkraft, der Pendelschwingungen, des Stoſses, des Wasserdrucks u. dgl. mit jedem solchen Beispiele verbinden.

148) Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens.

Gegeben sei $h = 300$ mm, $h_2 = 20$ mm $= b_1$, $b_2 = 200$ mm. Die Hauptaufgabe soll darin bestehen, die Lage der Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt zu bestimmen und daraus gewisse Schlüsse zu ziehen. Der Einfachheit halber sind die Resultate jedesmal auf ganze Millimeter abgerundet. Dadurch treten