Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Grenzmomente für den Viertelkreis und Achtelkreis.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

m) Auf andere Aufgaben der Mechanik, bei denen es sich um Pendelschwingungen, excentrischen Stofs, um Mittelpunkt des Wasserdrucks und dgl. handelt, sei gelegentlich dieses Übungsbeispiels nur kurz hingedeutet, da sie nur für die Übung im Ansatze, nicht aber für die Praxis Wert haben.

149) Im Anschluss an Culmanns Graphische Statik sind in den nebenstehenden Figuren noch einige Centralellipsen zweiter Art für gewisse Querschnitte skizziert worden, die für Übungsbeispiele brauchbar sind.

Fig. 127 g.

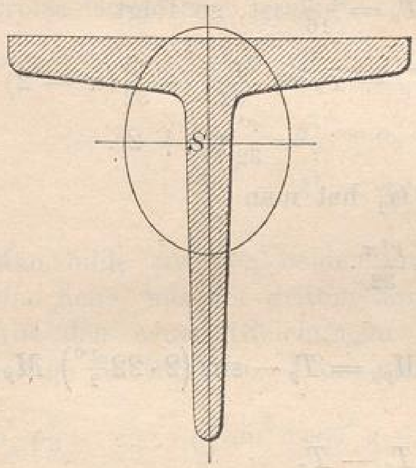


Fig. 127 h.

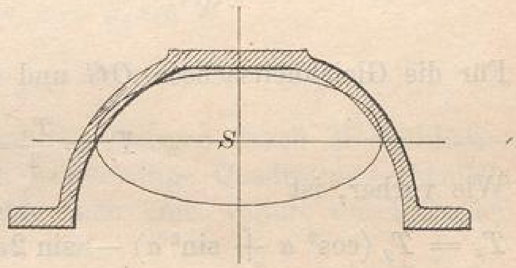
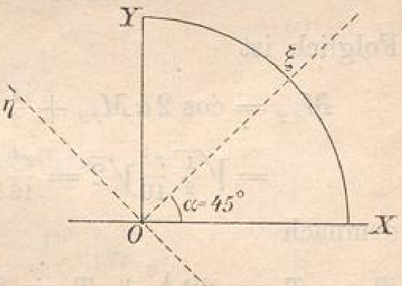


Fig. 127ᵇ stellt den Querschnitt einer Schiene dar, Fig. 127ᶜ ein Winkeleisen, Fig. 127ᵈ ein ⌶-Eisen, Fig. 127ᵉ ein **Z**-Eisen, Fig. 127ᶠ ein **U**-Eisen, Fig. 127ᵍ ein **T**-Eisen, Fig. 127ʰ ein Quadrant-Eisen, auch Zores-Eisen genannt.

150) **Aufgabe.** Die Grenzträgheitsmomente des Viertelkreises für den Mittelpunkt zu berechnen.

Fig. 128.



Aus $T_x = T_y = \frac{r^4 \pi}{16}$ folgt nach der Gleichung

$$T_\alpha = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

für den $\sphericalangle\, \alpha = 45^0$

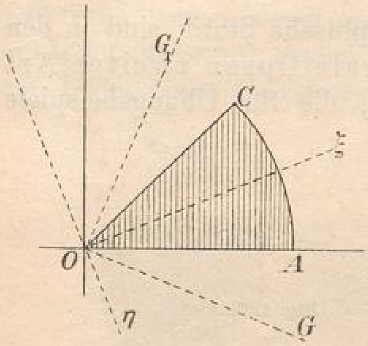
$$T_\xi = T_x(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha M_{xy} = T_x - \sin 2\alpha M_{xy}.$$

Nun ist aber $M_{xy} = \frac{r^4}{8}$, folglich

$$T_\xi = \frac{r^4\pi}{16} - \sin(2\cdot 45^0)\, M_{xy} = \frac{r^4\pi}{16} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{16}(\pi - 2) = T_{\min},$$

$$T_\eta = \frac{r^4\pi}{16} - \sin(-90^0)\, M_{xy} = \frac{r^4\pi}{16} + \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{16}(\pi + 2) = T_{\max}.$$

Fig. 120.



151) **Aufgabe.** Dasselbe für den Achtelkreis.

Nach vorigem Abschnitt folgt aus T_ξ für T_x die Hälfte, also

$$T_x = \frac{r^4}{32}(\pi - 2).$$

Da aber $T_p = \frac{r^4\pi}{16}$ ist, so folgt

$$T_y = T_p - T_x = \frac{2r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2)$$
$$= \frac{r^4}{32}(\pi + 2).$$

Für die Gleichheitsachsen OG und OG_1 hat man

$$T_g = \frac{T_p}{2} = \frac{r^4\pi}{32}.$$

Wie vorher, ist

$$T_x = T_g(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \sin 2\alpha\, M_{gg} = T_g - \sin\left(2\cdot 22\tfrac{1}{2}^0\right) M_{gg},$$

folglich

$$M_{gg}\sin 45^0 = T_g - T_x$$

und das Maximum des Centrifugalmomentes für O

$$M_{gg} = \frac{T_g - T_x}{\sin 45^0} = \frac{\frac{r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{r^4}{16}\sqrt{2}.$$

Folglich ist

$$M_{xy} = \cos 2\alpha\, M_{gg} + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\,(T_g - T_g) = \cos 45^0 \cdot \frac{r^4}{16}\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{r^4}{16}\sqrt{2} = \frac{r^4}{16},$$

demnach

$$T_\xi = T_x\cos 22\tfrac{1}{2}^0 + T_y\sin 22\tfrac{1}{2}^0 - \sin 45^0 M_{xy} = \frac{r^4}{32}(\pi - 2)\,\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$+ \frac{r^4}{32}(\pi + 2)\,\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{r^4}{16} = \frac{r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{16}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{r^4}{16}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{r^4\pi}{32} - \frac{r^4\pi}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{r^4}{32}(\pi - 2\sqrt{2}) = T_{\min},$$

dagegen

$$T_p - T_{\min} = \frac{2r^4\pi}{32} - \frac{r^4}{32}(\pi - 2\sqrt{2}) = \frac{r^4}{32}(\pi + 2\sqrt{2}) = T_{\max}.$$

Diese Resultate werden sich später in einer allgemeinen Formel bestätigen.

152) **Eine brauchbare Beziehung zwischen dem Trägheitsmoment und dem Centrifugalmoment** ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Nach Nr. 133 ist für die um α und die um $\beta = \alpha + 90^0$ gegen die grofse Hauptachse geneigten Achsen

$$\varrho_\alpha^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha$$

$$\varrho_\beta^2 = \varrho_2^2 \cos^2\alpha + \varrho_1^2 \sin^2\alpha$$

$$\lambda^2 = \left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) \sin\alpha \cos\alpha.$$

Man bilde aus den beiden ersten Gleichungen durch Multiplikation eine neue, aus der dritten durch beiderseitige Quadrierung ebenfalls. Aus den neuen Gleichungen bilde man eine weitere durch beiderseitige Subtraktion. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\varrho_\alpha^2 \varrho_\beta^2 - \lambda^4 &= \varrho_2^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \varrho_2^2\varrho_1^2(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \varrho_1^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &\quad - \left[\varrho_2^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\varrho_2^2\varrho_1^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \varrho_1^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right] \\ &= \varrho_1^2\varrho_2^2(\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) \\ &= \varrho_1^2\varrho_2^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \varrho_1^2\varrho_2^2.\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\lambda^4 = \varrho_\alpha^2\varrho_\beta^2 - \varrho_1^2\varrho_2^2$$

oder

$$\lambda^4 = (\varrho_\alpha\varrho_\beta)^2 - (\varrho_1\varrho_2)^2.$$

Daraus folgt z. B.

$$F^2\lambda^4 = F\varrho_\alpha^2 \cdot F\varrho_\beta^2 - F^2\varrho_1^2\varrho_2^2$$

oder

$$M_{xy}^2 = T_\alpha T_\beta - F^2\varrho_1^2\varrho_2^2.$$

Von der letzteren Beziehung soll später eine wichtige Anwendung gemacht werden.