Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 52. Bewegung eines mathematischen Pendels. Beispiele 199-200

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

§ 52. Bewegung eines mathematischen Pendels.

Ein Pendel heißt im allgemeinen jeder um eine horizontale Achse schwingender Körper. Unter einem **mathematischen Pendel** versteht man einen an einem gewichtslos gedachten Faden aufgehängten, schwingenden, materiellen Punkt, Fig. 164.

Schwingung heißt die Bewegung des materiellen Punktes von der äußersten Lage rechts über die Mittellage bis zur äußersten Lage links. Die

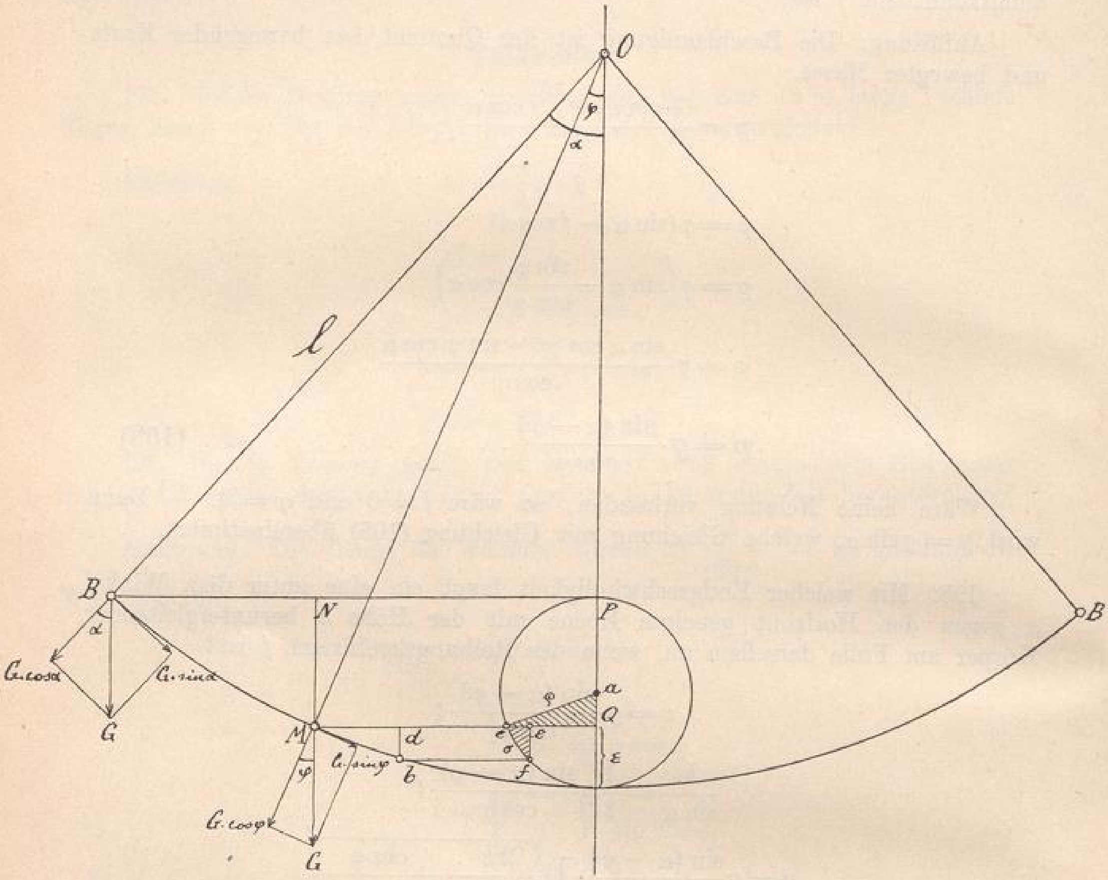

Fig. 164.

Zeit für eine Schwingung wird **Schwingungsdauer** genannt. Der jeweilige Ausschlagswinkel des Pendels aus der Mittellage wird mit **Elongation**, der größte Ausschlagswinkel mit **Amplitude** bezeichnet. Die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit heißt **Schwingungszahl.**

1 Schwingung dauert t Sek.
x Schwingungen dauern 1 „ .

Daher $x : 1 = 1 : t$ oder

$$x = \frac{1}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(170)}$$

„Schwingungszahl und Schwingungszeit sind reziproke Werte."

Die **Schwingungsintensität**, das Maß der Schwingung, ist abhängig von der Größe der jeweiligen Schwingungsgeschwindigkeit. Infolge der Schwere wirken in

B		M	
$G \cos \alpha$	$G \sin \alpha$	$G \cos \varphi$	$G \sin \varphi$
spannend	bewegend	spannend	bewegend

Die Beschleunigung in B ist $\frac{G}{g} \sin \alpha$, in M $\frac{G}{g} \sin \varphi$; da nun $\varphi < \alpha$ ist, wird

$$\frac{G}{g} \sin \varphi < \frac{G}{g} \sin \alpha \qquad \textbf{(171)}$$

„Die Beschleunigung ist ein Maximum in den Amplituden, ein Minimum (0) in der Mittellage.“ Die Geschwindigkeit, welche das Bewegliche in M erlangt, ist so groß, als wäre es die Höhe $\overline{NM}$ frei herabgefallen.

$$v = \sqrt{2g \cdot \overline{NM}}; \; \overline{NM} = \overline{OQ} - \overline{OP} = l (\cos \varphi - \cos \alpha), \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2\,gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}} \qquad \textbf{(172)}$$

Für B ist $\varphi = 0$, folgt $v = 0$

„ A „ $\varphi = 0$, „ $v = \sqrt{2\,gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}$

„ B' „ $\varphi = -\alpha$, „ $v = 0$

„In B und B' sind die minimalen, in A ist die maximale Geschwindigkeit vorhanden.“

Vom Luftwiderstande ist in obigen Betrachtungen abgesehen worden. Unter Nichtberücksichtigung desselben werde im folgenden die Formel für die Schwingungsdauer abgeleitet.

In M ist
$$v = \sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}$$

Die Zeit für den unendlich kleinen Weg $\overline{Mb}$ ist

$$\tau = \frac{\overline{Mb}}{\sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}}$$

Da $\triangle\, Mbd \sim \triangle\, MOQ$, wird

$$\overline{Mb} : \overline{bd} = l : \overline{MQ} \text{ oder}$$
$$\overline{Mb} : \overline{bd} = l : \sqrt{\varepsilon\,(2\,l - \varepsilon)}$$

ε^2 kann wegen seiner Kleinheit gegen $2\,l\,\varepsilon$ vernachlässigt werden. Dann ergibt sich
$$\tau = \sqrt{\frac{\overline{Mb}}{2\,g \cdot \overline{PQ}}} = \frac{\overline{bd} \cdot l}{\sqrt{2\,l\,\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\,g \cdot \overline{PQ}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\sqrt{\varepsilon \cdot \overline{PQ}}}$$

Nun ist $\overline{cQ} = \sqrt{\overline{PQ} \cdot \varepsilon}$, daher $\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\overline{cQ}}$;

ferner ist $\triangle\, cef \sim \triangle\, cQa$, so daß

$$\overline{fe} : \overline{cQ} = \sigma : \varrho$$
$$\overline{fe} = \overline{bd}$$
$$\frac{\overline{bd}}{\overline{cQ}} = \frac{\sigma}{\varrho}, \text{ also}$$
$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}$$

Die Summe aller unendlich kleinen Zeitteilchen τ ergibt die ganze Schwingungszeit

$$t = \Sigma(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \Sigma\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \Sigma(\sigma)_B^{B'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot 2\varrho\pi$$

Die Dauer der Schwingung von B bis B' ist daher

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(173)}$$

Aus letzter Formel lassen sich einige wertvolle Schlüsse ziehen.

a) Die Größe α kommt in der Gleichung für t nicht vor. „Die Schwingungsdauer ist unabhängig vom Elongationswinkel (allerdings solange derselbe sehr klein ist)". Pendel gleicher Länge sind **isochron.** —

b) Zwei Pendel mit den Längen l_1 und l_2 haben an demselben Ort der Erde die Schwingungszeiten

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \text{ und } t_2 = \pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

Demnach folgt

$$\left.\begin{aligned} t_1^2 : t_2^2 &= l_1 : l_2 \\ \text{und } n_1^2 : n_2^2 &= l_2 : l_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(174)}$$

d. h. „Die Längen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder verkehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen."

c) Für Pendel an verschiedenen Orten der Erde müssen die Längen ungleich ausfallen, wenn die Schwingungszeiten gleich werden sollen. In der nördl. Breite 45⁰ wird $l = \frac{g}{\pi^2} \sim 1$ m (0,99355), wenn das Pendel eine Schwingung in der Sekunde machen soll.

Beispiele.

199. Wie groß ist die Fallbeschleunigung an einem Orte der Erde, an dem ein 1 m langes Pendel genau 1 Schwingung in der Sekunde macht?

Auflösung: $\quad g = \pi^2 = \mathbf{9{,}8696}$ **m**

200. Welches Verhältnis besteht zwischen der Schwingungszeit eines l Meter langen Pendels und der Fallzeit für die Höhe l?

Auflösung:

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$t_1 : t_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$\boldsymbol{t_1 : t_2 = \pi : \sqrt{2}}$$