# Die Mechanik fester Körper

**Blau, Ernst**

**Hannover, 1905**

§ 53. Bewegungsgesetze rotierender Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

## § 53. Bewegungsgesetze rotierender Körper.

„Unter **Winkelgeschwindigkeit** $\omega$ eines um eine feste Achse sich gleichförmig drehenden Körpers versteht man den Winkel, welchen jedes Teilchen dieses Körpers pro Zeiteinheit zurücklegt.“ Siehe § 6.

Statt im Winkelmaß kann $\omega$ auch im Bogenmaß (als Bogen mit dem Radius 1) ausgedrückt werden. Dann wird die Geschwindigkeit am Radius $r$, die **Bahngeschwindigkeit**, $v = r\omega$.

„Unter dem **Trägheitsmoment** eines starren Körpers in bezug auf eine bestimmte Drehachse versteht man die Summe der Produkte aus den Massenteilchen des Körpers und den Quadraten ihrer Abstände von derselben.“

Bei einer **gleichförmig drehenden Bewegung** eines starren Körpers existiert zwischen Energie und Trägheitsmoment desselben eine bestimmte Beziehung.

Die Massenteilchen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ haben die Bahngeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1\omega \\ v_2 &= r_2\omega \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die lebendigen Kräfte der Massenteilchen sind dann

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1}{2} r_1^2 \omega^2 \\ \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_2}{2} \cdot r_2^2 \omega^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Demnach wird die totale lebendige Kraft des rotierenden Körpers

$$L = \Sigma\left(\frac{m}{2} r^2 \omega^2\right) = \frac{\omega^2}{2} \cdot \Sigma(m r^2)$$

$\Sigma(m r^2)$ ist das Trägheitsmoment des Körpers, so daß der Ausdruck für seine Energie lautet

$$L = \frac{\omega^2}{2} \cdot J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

Bei der **ungleichförmig drehenden Bewegung** ändert sich die Winkelgeschwindigkeit jeden Augenblick. Ein Teilchen $m_1$ eines sich ungleichförmig drehenden Körpers hatte anfangs die Bahngeschwindigkeit $v_1$ und nach der Zeit $\tau$ die Bahngeschwindigkeit $v_1'$. — Dann gilt

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 \omega_1 \\ v_1' &= r_1 \omega_1' \end{aligned}$$

Die Bahngeschwindigkeitsänderung ist dann

$$v_1 - v_1' = r_1(\omega_1 - \omega_1'),$$

daher die **Bahnbeschleunigung**

$$p = \frac{v_1 - v_1'}{\tau} = r_1 \frac{\omega_1 - \omega_1'}{\tau}.$$

„Das Verhältnis aus der Winkelgeschwindigkeitsänderung $(\omega_1 - \omega_1')$ und der Zeit $\tau$, in welcher diese erfolgt, heißt **Winkelbeschleunigung** $\varepsilon$.“

Daher wird $$p = r \cdot \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

Zwischen dem die **gleichförmig beschleunigte Drehung** veranlassenden Drehmomente und dem Trägheitsmomente des rotierenden Körpers läßt sich eine wertvolle Beziehung ableiten. Es sind nämlich die Bahnbeschleunigungen der Teilchen des Körpers

$$p_1 = r_1 \varepsilon$$
$$p_2 = r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Die auf die Teilchen wirkenden Drehkräfte

$$m_1 p_1 = m_1 r_1 \varepsilon$$
$$m_2 p_2 = m_2 r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \quad \vdots$$

endlich die auf die Teilchen wirkenden Drehmomente

$$D_1 = m_1 p_1 r_1 = m_1 r_1^2 \varepsilon$$
$$D_2 = m_2 p_2 r_2 = m_2 r_2^2 \varepsilon.$$

Daher wird das Gesamtdrehmoment

$$D = \Sigma (mr^2 \cdot \varepsilon) = \varepsilon \cdot \Sigma (mr^2) \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{D = \varepsilon \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(177)}$$

Aus Formel (175) ist erklärlich, warum große Massen, z. B. Schwungradkränze, infolge ihrer großen Trägheitsmomente große Energien übertragen können, Formel (177) zeigt, daß ein großes Drehmoment an einem Körper eine große Winkelbeschleunigung hervorruft.

„Unter dem Zentrifugalmoment eines geometrischen Gebildes in bezug auf zwei zueinander beliebig geneigte Achsen versteht man die Summe der Produkte aus den Größen der Teilchen des Gebildes und der Koordinaten derselben.“

$$\boldsymbol{L = \Sigma (f \cdot x \cdot y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(178)}$$

„Ist das Gebilde ein symmetrisches, so ist dessen Zentrifugalmoment in bezug auf seine Hauptachsen gleich Null.“

---

## § 54. Reduktion von Trägheitsmomenten.

Ist z. B. das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf irgend eine Achse bekannt, dann läßt sich leicht dasjenige in bezug auf eine andere, zu ersterer bestimmt liegende finden.

„Die Aufsuchung des Trägheitsmomentes in bezug auf eine bestimmte Achse aus einem in bezug auf eine andere Achse gegebenen Trägheitsmomente nennt man **Reduktion** des letzteren.“

Es sei, Fig. 165, $\overline{MN}$ eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende, $\overline{mn}$ eine zu dieser im Abstande $a$ parallele Achse.

Das Trägheitsmoment eines Massenteilchens $A$ des Körpers in bezug auf die Achse $\overline{MN}$ ist

$$\triangle J_s = m \cdot \varrho^2,$$

in bezug auf die Achse $\overline{mn}$ dagegen

$$\triangle J_o = mr^2$$