# Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 54. Reduktion von Trägheitsmomenten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Zwischen dem die **gleichförmig beschleunigte Drehung** veranlassenden Drehmomente und dem Trägheitsmomente des rotierenden Körpers läßt sich eine wertvolle Beziehung ableiten. Es sind nämlich die Bahnbeschleunigungen der Teilchen des Körpers

$$p_1 = r_1 \varepsilon$$
$$p_2 = r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Die auf die Teilchen wirkenden Drehkräfte

$$m_1 p_1 = m_1 r_1 \varepsilon$$
$$m_2 p_2 = m_2 r_2 \varepsilon$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

endlich die auf die Teilchen wirkenden Drehmomente

$$D_1 = m_1 p_1 r_1 = m_1 r_1^2 \varepsilon$$
$$D_2 = m_2 p_2 r_2 = m_2 r_2^2 \varepsilon.$$

Daher wird das Gesamtdrehmoment

$$D = \Sigma (mr^2 \cdot \varepsilon) = \varepsilon \cdot \Sigma (mr^2) \text{ oder}$$
$$\boldsymbol{D = \varepsilon \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(177)}$$

Aus Formel (175) ist erklärlich, warum große Massen, z. B. Schwungradkränze, infolge ihrer großen Trägheitsmomente große Energien übertragen können, Formel (177) zeigt, daß ein großes Drehmoment an einem Körper eine große Winkelbeschleunigung hervorruft.

„Unter dem Zentrifugalmoment eines geometrischen Gebildes in bezug auf zwei zueinander beliebig geneigte Achsen versteht man die Summe der Produkte aus den Größen der Teilchen des Gebildes und der Koordinaten derselben.“

$$\boldsymbol{L = \Sigma (f \cdot x \cdot y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(178)}$$

„Ist das Gebilde ein symmetrisches, so ist dessen Zentrifugalmoment in bezug auf seine Hauptachsen gleich Null.“

---

## § 54. Reduktion von Trägheitsmomenten.

Ist z. B. das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf irgend eine Achse bekannt, dann läßt sich leicht dasjenige in bezug auf eine andere, zu ersterer bestimmt liegende finden.

„Die Aufsuchung des Trägheitsmomentes in bezug auf eine bestimmte Achse aus einem in bezug auf eine andere Achse gegebenen Trägheitsmomente nennt man **Reduktion** des letzteren.“

Es sei, Fig. 165, $\overline{MN}$ eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende, $\overline{mn}$ eine zu dieser im Abstande $a$ parallele Achse.

Das Trägheitsmoment eines Massenteilchens $A$ des Körpers in bezug auf die Achse $\overline{MN}$ ist

$$\triangle J_s = m \cdot \varrho^2,$$

in bezug auf die Achse $\overline{mn}$ dagegen

$$\triangle J_o = mr^2$$

Zieht man $\overline{AC}$ senkrecht zur Ebene $E$, welche durch die Achse $\overline{MN}$ gelegt ist, dann wird

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\alpha$$

Nun ist $\varrho\cos\alpha = h$, daher

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2ah$$

Beide Seiten der Gleichung mit $m$ multipliziert, folgt

$$mr^2 = ma^2 + m\varrho^2 - 2ahm$$

Demnach gilt für den ganzen Körper

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(ma^2) + \Sigma(m\varrho^2) - \Sigma(2ahm) \text{ oder}$$

$$J_o = Ma^2 + J_s - 2a\cdot\Sigma(hm)$$

Der Ausdruck $\Sigma(hm)$ ist das statische Moment des Körpers in bezug auf eine Schwerachse und daher gleich Null. Es ist also

$$\boldsymbol{J_o = J_s + M\cdot a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(179)}$$

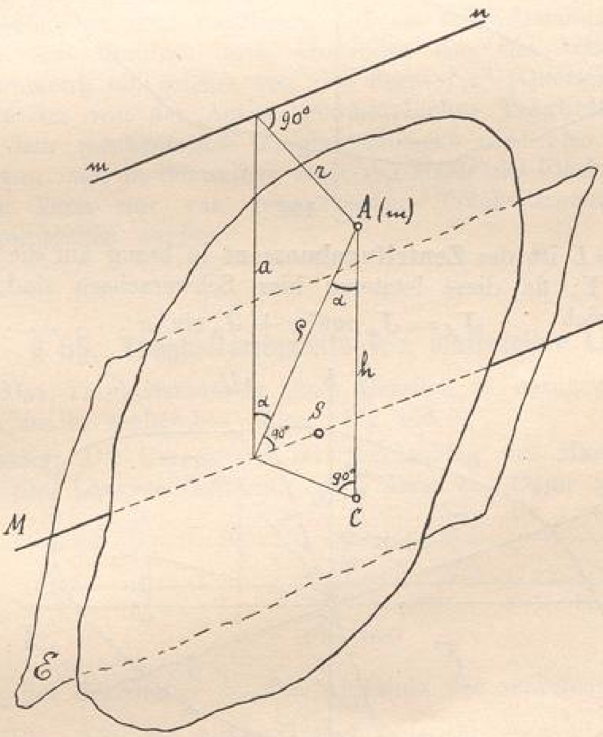


Fig. 165.

$J_s$ ist immer kleiner als $J_o$, weil $Ma^2$ positiv ist. „Das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Schwerachse ist somit das kleinstmögliche.“

Meist werden für Flächen die Trägheitsmomente in bezug auf deren Symmetrieachse gesucht. Oft aber braucht man das Trägheitsmoment einer symmetrischen Fläche in bezug auf eine beliebige Schwerachse. In Fig. 166 ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse $A$

$$J_A = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \ldots\ldots$$

Nun ist
$$z_1 = \overline{m_1 b} - \overline{ab} = y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha$$
$$z_1^{\,2} = y_1^{\,2}\cos^2\alpha - 2\,x_1\,y_1 \sin\alpha\cos\alpha + x_1^{\,2}\sin^2\alpha \quad \text{oder}$$
$$z_1^{\,2} = y_1^{\,2}\cos^2\alpha + x_1^{\,2}\sin^2\alpha - x_1\,y_1 \sin 2\,\alpha; \quad \text{daher}$$
$$J_A = m_1\,(y_1^{\,2}\cos^2\alpha + x_1^{\,2}\sin^2\alpha - \sin 2\,\alpha\cdot x_1\,y_1) +$$
$$+\, m_2\,(y_2^{\,2}\cos^2\alpha + x_2^{\,2}\sin^2\alpha - \sin 2\,\alpha\cdot x_2\,y_2) + \ldots$$
$$J_A = \sin^2\alpha\cdot\Sigma\,(m\,x^2) + \cos^2\alpha\cdot\Sigma\,(m\,y^2) - \sin 2\,\alpha\cdot\Sigma\,(m\,x\,y).$$

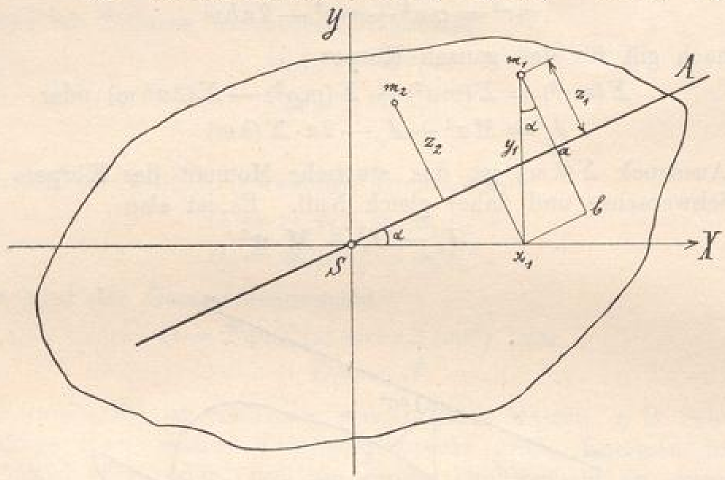


Fig. 166.

$\Sigma\,(m\,x\,y) = L$ ist das **Zentrifugalmoment** in bezug auf die Koordinatenachsen $X$ und $Y$; da diese letzteren hier Schwerachsen sind, ist $L = 0$. Daher schreibt sich
$$\boldsymbol{J_A = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha} \;\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(180)}$$

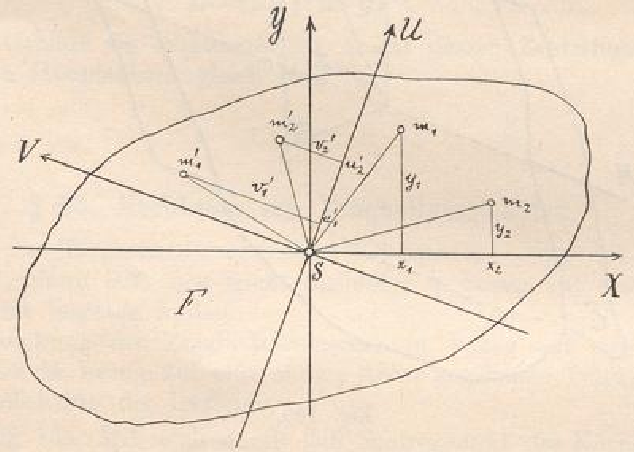


Fig. 167.

„Alle bisher genannten Trägheitsmomente von Flächen heißen **äquatoriale.** Die Achsen, in bezug auf welche die Trägheitsmomente genommen sind, liegen in den Flächen."

„**Polares Trägheitsmoment** eines Querschnittes indes ist dasjenige, welches in bezug auf eine zu diesem senkrecht stehende Achse genommen wird. Der Schnittpunkt der Achse mit der Fläche heißt **Pol.**"

Es soll nun das polare Trägheitsmoment der Fläche $F$, Fig. 167, in bezug auf den Pol $S$ (Schwerpunkt) gefunden und durch die beiden äquatorialen Trägheitsmomente $J_x$ und $J_y$ ausgedrückt werden. Nun sind:

$$J_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \ldots\ldots$$
$$J_y = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots\ldots$$
$$J_p = m_1 (x_1^2 + y_1^2) + m_2 (x_2^2 + y_2^2) + \ldots \quad \text{oder}$$
$$J_p = m_1 (u_1^2 + v_1^2) + m_2 (u_2^2 + v_2^2) + \ldots$$

Somit ist einerseits $J_p = \Sigma (m x^2) + \Sigma (m y^2)$ und

andererseits $J_p = \Sigma (m u^2) + \Sigma (m v^2)$, also

$$\boldsymbol{J_p = J_x + J_y = J_u + J_v} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(181)}$$

„Das polare Trägheitsmoment eines Querschnittes ist gleich der Summe zweier äquatorialer, welche in bezug auf durch den Pol gehende, beliebige, aber senkrecht aufeinander stehende Achsen genommen sind.“

„Ist der Querschnitt regulär, so ist das polare Trägheitsmoment doppelt so groß wie das äquatoriale.“

„Schließlich sei noch angeführt, daß ein Trägheitsmoment von der Form $mr^2$ (Masse mal Quadrat ihres Abstandes von der Achse) **mechanisches Trägheitsmoment**, ein solches von der Form $f \cdot r^2$ (Querschnitt mal Quadrat seines Abstandes von der Achse) **geometrisches Trägheitsmoment** heißt.“

„Aus dem mechanischen Trägheitsmoment wird also das geometrische erhalten, wenn man in demselben statt der Masse die Fläche einführt. Selbstverständlich kann nur von geometrischen Trägheitsmomenten von Querschnitten gesprochen werden.“

## § 55. Trägheitsmomente von materiellen Linien.

201. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte zu ihr senkrechte Achse. Fig. 168.

Auflösung: Die Gerade $\overline{OA}$ sei gleichmäßig mit Masse belegt gedacht und zwar pro Längeneinheit mit der Masse $\delta$. Dann ist die Masse des

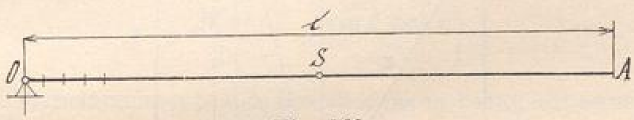


Fig. 168.

$n$-ten Teils der Geraden $\frac{l}{n} \cdot \delta$. Die Abstände der einzelnen, aufeinander folgenden Teilchen von der Achse $O$ sind $(n = \infty)$

$$\frac{l}{n},\ 2\frac{l}{n},\ 3\frac{l}{n},\ \ldots\ldots\ n \cdot \frac{l}{n}$$

Demnach wird das Trägheitsmoment der Geraden in bezug auf die Achse $O$

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(2\frac{l}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(n\frac{l}{n}\right)^2$$

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$$