Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 55. Trägheitsmomente von materiellen Linien. Beispiele 201-204

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Es soll nun das polare Trägheitsmoment der Fläche F, Fig. 167, in bezug auf den Pol S (Schwerpunkt) gefunden und durch die beiden äquatorialen Trägheitsmomente J_x und J_y ausgedrückt werden. Nun sind:

$$J_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J_y = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J_p = m_1 (x_1^2 + y_1^2) + m_2 (x_2^2 + y_2^2) + \ldots \quad \text{oder}$$
$$J_p = m_1 (u_1^2 + v_1^2) + m_2 (u_2^2 + v_2^2) + \ldots$$

Somit ist einerseits $J_p = \Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2)$ und
andererseits $J_p = \Sigma(mu^2) + \Sigma(mv^2)$, also

$$\boldsymbol{J_p = J_x + J_y = J_u + J_v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(181)}$$

„Das polare Trägheitsmoment eines Querschnittes ist gleich der Summe zweier äquatorialer, welche in bezug auf durch den Pol gehende, beliebige, aber senkrecht aufeinander stehende Achsen genommen sind.“

„Ist der Querschnitt regulär, so ist das polare Trägheitsmoment doppelt so groß wie das äquatoriale.“

„Schließlich sei noch angeführt, daß ein Trägheitsmoment von der Form mr^2 (Masse mal Quadrat ihres Abstandes von der Achse) **mechanisches Trägheitsmoment**, ein solches von der Form $f \cdot r^2$ (Querschnitt mal Quadrat seines Abstandes von der Achse) **geometrisches Trägheitsmoment** heißt.“

„Aus dem mechanischen Trägheitsmoment wird also das geometrische erhalten, wenn man in demselben statt der Masse die Fläche einführt. Selbstverständlich kann nur von geometrischen Trägheitsmomenten von Querschnitten gesprochen werden.“

§ 55. Trägheitsmomente von materiellen Linien.

201. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte zu ihr senkrechte Achse. Fig. 168.

Auflösung: Die Gerade $\overline{OA}$ sei gleichmäßig mit Masse belegt gedacht und zwar pro Längeneinheit mit der Masse δ. Dann ist die Masse des

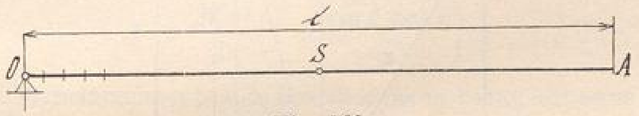

Fig. 168.

n-ten Teils der Geraden $\frac{l}{n} \cdot \delta$. Die Abstände der einzelnen, aufeinander folgenden Teilchen von der Achse O sind $(n = \infty)$

$$\frac{l}{n},\ 2\frac{l}{n},\ 3\frac{l}{n},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n \cdot \frac{l}{n}$$

Demnach wird das Trägheitsmoment der Geraden in bezug auf die Achse O

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(2\frac{l}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(n\frac{l}{n}\right)^2$$

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$$

In Aufgabe 112 wurde $(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2) = \frac{n^3}{3}$ ($n = \infty$) gefunden. Daher wird

$$J_O = \frac{l}{n} \cdot \delta \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} \quad \text{oder}$$

$$J_O = \frac{1}{3}(l \cdot \delta) \cdot l^2$$

Da $l \cdot \delta = m$, die Masse der Geraden ist, folgt

$$\boldsymbol{J_O = \frac{1}{3} m l^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(182)}$$

„Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Endpunkte auf ihr senkrechte Achse ist ebenso groß, als wenn der dritte Teil ihrer Masse am freien Ende konzentriert wäre.“

202. Das Trägheitsmoment einer Geraden in bezug auf eine in ihrem Mittelpunkte auf ihr senkrechte Achse.

Auflösung: Dasselbe heißt J_s — Laut Reduktionsformel (179) wird

$$J_s = J_o - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4}.$$

$$\boldsymbol{J_s = \frac{ml^2}{12} = \frac{1}{4} J_O} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(183)}$$

„Das Trägheitsmoment ist $^1/_4$ des vorigen.“

203. Wie lautet die Formel für das Trägheitsmoment eines Kreisbogens in bezug auf die in seinem Mittelpunkte auf seine Mittellinie senkrecht stehende Achse? Fig. 169.

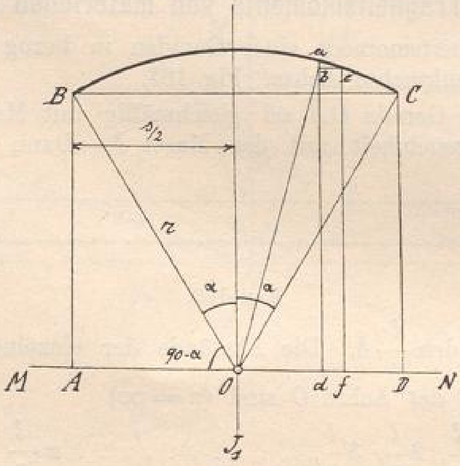

Fig. 169.

Auflösung: Der Kreisbogen BC habe den Radius r. — Winkel BOC sei gleich 2α. — Ein unendlich kleiner Teil von BC, nämlich $\overline{ac}$, hat das Trägheitsmoment

$$\delta \cdot \overline{ac} \cdot \overline{ad}^2,$$

wenn δ die Masse pro Längeneinheit des Bogens bedeutet. Das Trägheitsmoment des ganzen Bogens wird dann

$$J = \Sigma(\delta \cdot \overline{ac} \cdot \overline{ad}^2)$$

Da $\triangle abc \sim \triangle Oad$, folgt

$$\overline{ac} : \overline{bc} = \overline{Oa} : \overline{ad}$$

$$\overline{ac} = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{Oa}}{\overline{ad}} = \frac{\overline{bc} \cdot r}{\overline{ad}}$$

Demnach wird $J = \Sigma\left(\delta \cdot \frac{\overline{bc} \cdot r}{\overline{ad}} \cdot \overline{ad}^2\right) = r \cdot \delta \cdot \Sigma(\overline{ad} \cdot \overline{bc})$

Nun stellt $\overline{ad} \cdot \overline{bc}$ die Fläche $acdf$ vor, da man letztere ihrer Kleinheit wegen als ein Rechteck betrachten kann. $\Sigma(\overline{ad} \cdot \overline{bc})$ ist dann gleich Fläche $ABCD$.

$$\Sigma(\overline{ad} \cdot \overline{bc}) = \frac{\widehat{BC} \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot r \cdot \sin(90 - \alpha)$$

$$= \frac{2r \cdot \widehat{\alpha} \cdot r}{2} + \frac{1}{2} rs \cdot \cos\alpha$$

$$= r^2 \cdot \widehat{\alpha} + \frac{1}{2} r \cos\alpha \cdot 2r \cdot \sin\alpha$$

$$= r^2 \cdot \widehat{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J = r\delta \cdot r^2 \cdot \widehat{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$J = r\widehat{\alpha} \cdot \delta \cdot r^2 \left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$M = 2r\widehat{\alpha} \cdot \delta$$

$$r \cdot \widehat{\alpha} \cdot \delta = \frac{M}{2}, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{J = \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(184)}$$

204. Das Trägheitsmoment eines Kreisbogens in bezug auf seine Symmetrieachse. Fig. 169.

Auflösung: Das polare Trägheitsmoment des Kreisbogens ist $J_p = Mr^2$, daher wird

$$J_1 = Mr^2 - \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)$$

$$\boldsymbol{J_1 = \frac{Mr^2}{2}\left(1 - \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\widehat{\alpha}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(185)}$$