Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 56. Trägheitsmomente von ebenen Flächen. Beispiele 205-216

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

§ 56. Trägheitsmomente von ebenen Flächen.

205. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes in bezug auf die Grundlinie als Achse. Fig. 170.

Auflösung: Man denke sich das Rechteck in unendlich viele Streifen, welche senkrecht zur Grundlinie stehen, zerlegt. Ein solcher kann dann als materielle Linie aufgefaßt werden. Ist die Masse desselben m, so hat letztere in bezug auf die Grundlinie des Rechteckes das Trägheitsmoment $\frac{m h^2}{3}$ — Demnach ist dasjenige des ganzen Rechteckes

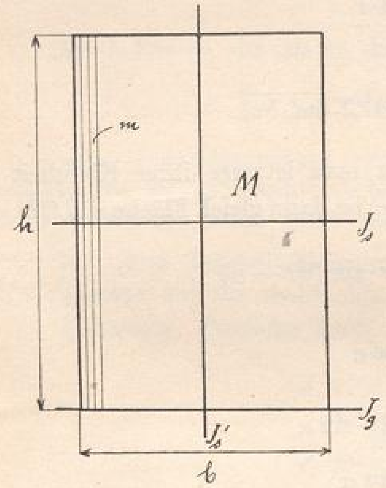

Fig. 170.

$$J_g = \Sigma\left(\frac{m h^2}{3}\right) = \frac{h^2}{3} \cdot \Sigma(m), \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{J_g = \frac{M}{3} h^2} \quad . \; . \; . \quad \textbf{(186)}$$

Setzt man statt M die Fläche des Rechteckes $b \cdot h$ ein, so ergibt sich das geometrische Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{J_g = \frac{b h^3}{3}} \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(187)}$$

206. Das Trägheitsmoment des Rechteckes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 170.

Auflösung: Laut Reduktionsformel (179) wird

$$J_s = J_g - M \frac{h^2}{4} = \frac{M}{3} h^2 - \frac{M}{4} h^2, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{J_s = \frac{M}{12} h^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(188)}$$

Wird statt M die Fläche des Rechteckes $b \cdot h$ eingesetzt, so ergibt sich das geometrische Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{J_s = \frac{b h^3}{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(189)}$$

207. Polares Trägheitsmoment eines Rechteckes in bezug auf seinen Schwerpunkt als Pol. Fig. 170.

Auflösung: Laut (181) ist

$$J_p = J_s + J_{s'} = \frac{M}{12} h^2 + \frac{M}{12} b^2, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{J_p = \frac{M}{12} (b^2 + h^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(190)}$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment wird

$$\boldsymbol{J_p = \frac{1}{12} (b^3 h + b h^3)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(191)}$$

208. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 171.

Auflösung: Da die Dreiecksfläche ABC gleich ist der halben Fläche des Parallelogrammes $ABCD$, welches mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe

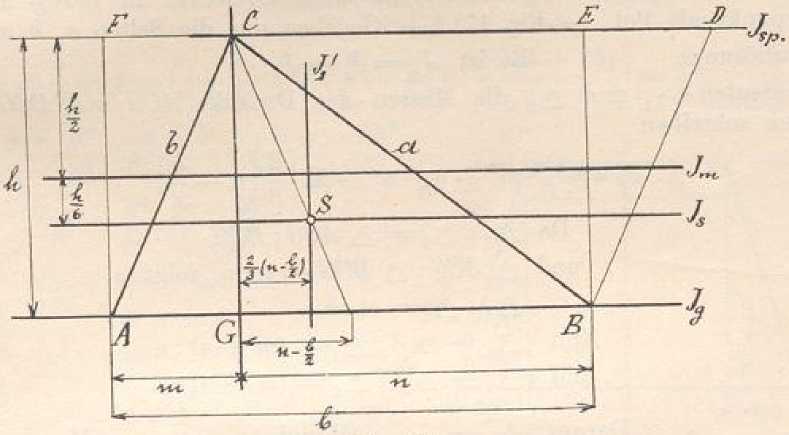

Fig. 171.

hat, so ist das Trägheitsmoment des Dreieckes in bezug auf eine zur Basis parallele, die Höhe halbierende Achse

$$J_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{2M}{12} h^2 = \frac{M}{12} h^2$$

Demnach in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse

$$J_s = J_m - M\left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{M}{12} h^2 - \frac{M}{36} h^2$$

$$\boldsymbol{J_s = \frac{M}{18} h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(192)}$$

Das geometrische Trägheitsmoment wird

$$\boldsymbol{J_s = \frac{b h^3}{36}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(193)}$$

209. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf die Grundlinie als Achse. Fig. 171.

Auflösung: $J_g = J_s + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{M}{9} h^2 = \frac{6}{36} M h^2$, somit

$$\boldsymbol{J_g = \frac{M}{6} h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(194)}$$

Das geometrische Trägheitsmoment ist

$$\boldsymbol{J_g = \frac{b h^3}{12}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(195)}$$

210. Das Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf eine durch die Spitze parallel zur Grundlinie gelegte Achse. Fig. 171.

Auflösung:

$$J_{sp} = \frac{M}{18} h^2 + M \cdot \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{4}{9} M h^2, \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{J_{sp} = \frac{M}{2} h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(196)}$$

Das geometrische Trägheitsmoment ist

$$\boldsymbol{J_{sp} = \frac{b\,h^3}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(197)}$$

211. Das polare Trägheitsmoment eines Dreieckes in bezug auf den Schwerpunkt als Pol. — Fig. 171. — Gegeben nur die Seiten a, b und c.

Auflösung: Es ist $J_p = J_s + J_{s'}$

Bedeuten $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Massen der Dreiecke ACG und BCG, dann läßt sich schreiben

$$J_{s'} = \frac{\triangle_1}{6} m^2 + \frac{\triangle_2}{6} n^2 - M\left[\frac{2}{3}\left(n - \frac{b}{2}\right)\right]^2$$

Da $\triangle_1 : \triangle_2 = \triangle\ ACG : BCG$

und $\triangle\ ACG : \triangle\ BCG = m : n$, folgt

$$\triangle_1 : \triangle_2 = m : n$$

Nun $(\triangle_1 + \triangle_2) : \triangle_1 = (m + n) : n$

und $(\triangle_1 + \triangle_2) : \triangle_2 = (m + n) : n$

Daraus $\triangle_1 = \frac{m}{m+n} M$ und $\triangle_2 = \frac{n}{m+n} \cdot M$

Demnach ergibt sich durch Substitution von $\triangle_1$ und $\triangle_2$

$$J_{s'} = \frac{m^3}{6\,(m+n)} \cdot M + \frac{n^3}{6\,(m+n)} \cdot M - \frac{M}{9}(2n - b)^2 = \frac{M}{6}(m^2 - mn + n^2) - \frac{M}{9}(n - m)^2$$

$$J_p = \frac{M}{18} h^2 + \frac{M}{6}(m^2 - mn + n^2) - \frac{M}{9}(n^2 - mn + m^2)$$

$$= \frac{M}{18}(h^2 + m^2 + n^2 + m \cdot n)$$

$$J_p = \frac{M}{36}\left[(h^2 + m^2) + (h^2 + n^2) + (m^2 + mn + n^2)\right]$$

$$\boldsymbol{J_p = \frac{M}{36}(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(198)}$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt als Pol ist dann

$$\boldsymbol{J_p = \frac{F}{36}(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(199)}$$

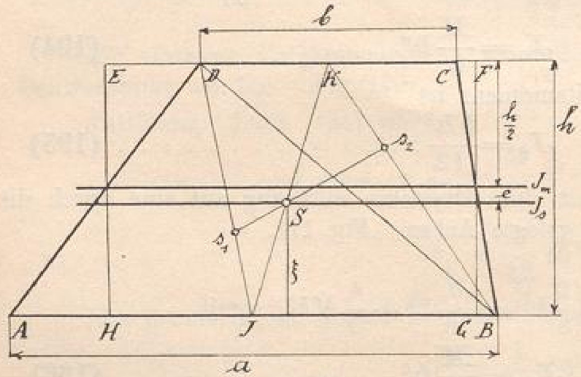

Fig. 172.

212. Geometrisches Trägheitsmoment des Trapezes in bezug auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse. Fig. 172.

Auflösung: Das Trägheitsmoment des Trapezes in bezug auf die Achse J_m ist so groß wie dasjenige des flächengleichen Rechteckes, also

$$J_m = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h^3}{12}$$

Dasselbe soll nun auf die Schwerachse reduziert werden. Zunächst ist hierzu ξ nötig.

$$\frac{bh}{2}\cdot\frac{2}{3}h+\frac{ah}{2}\cdot\frac{h}{3}=\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot\xi$$

$$\xi=\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$$

$$e=\frac{h}{2}-\xi=\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}=\frac{h}{6}\left[3-\frac{2(a+2b)}{a+b}\right]=\frac{h}{6}\cdot\frac{a-b}{a+b}$$

$$J_s=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h^3}{12}-\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{h}{6}\cdot\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

$$J_s=\frac{a+b}{24}h^3-\frac{h^3}{72}\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72}\cdot\frac{3(a+b)^2-(a-b)^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72}\cdot\frac{3a^2+6ab+3b^2-a^2+2ab-b^2}{a+b}$$

$$J_s=\frac{h^3}{72(a+b)}\cdot(2a^2+8ab+2b^2)$$

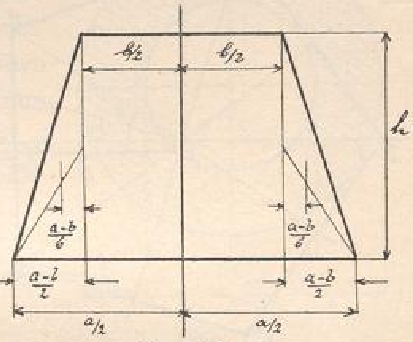

Fig. 173.

$$\boldsymbol{J_s=\frac{h^3}{36}\cdot\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(200)}$$

213. Geometrisches Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Trapezes in bezug auf die die Mittelpunkte der Parallelseiten verbindende Achse. Fig. 173.

Auflösung:

$$J=\frac{hb^3}{12}+2\left[h\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{36}+\frac{h}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\left(\frac{b}{2}+\frac{a-b}{6}\right)^2\right]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+2\left[\frac{h(a-b)^3}{8\cdot36}+\frac{h}{4}(a-b)\left(\frac{a+2b}{6}\right)^2\right]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot36}[(a-b)^2+2(a+2b)^2]$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot36}(a^2-2ab+b^2+2a^2+8ab+8b^2)$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot36}(3a^2+6ab+9b^2)$$

$$J=\frac{hb^3}{12}+\frac{2h(a-b)}{8\cdot12}\cdot(a^2+2ab+3b^2)$$

$$J=\frac{h}{48}(4b^3+a^3-a^2b+2a^2b-2ab^2+3ab^2-3b^3)$$

$$J=\frac{h}{48}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$J=\frac{h}{48}[a^2(a+b)+b^2(a+b)]$$

$$\boldsymbol{J=\frac{h}{48}(a^2+b^2)\cdot(a+b)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(201)}$$

214. Polares Trägheitsmoment eines regulären Polygons in bezug auf dessen Schwerpunkt als Pol. Fig. 174.

Auflösung: Das reguläre Polygon habe n Seiten und die Masse M. — Ein Dreieck SAB hat die Masse $\frac{M}{n}$. — Das Trägheitsmoment dieses Dreieckes in bezug auf die Achse $\overline{SF}$ ist

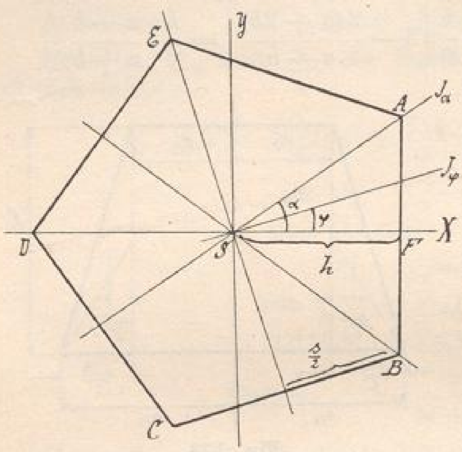

Fig. 174.

$$\triangle J_x = 2\,\frac{M}{2n}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{M}{24n}\cdot s^2$$

In bezug auf die zu $\overline{SF}$ senkrechte Achse ist dasselbe

$$\triangle J_y = \frac{M}{n}\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{M}{2n}\cdot h^2$$

Daher ist das polare Trägheitsmoment dieses Dreieckes in bezug auf die Spitze als Pol

$$\triangle J_p = \frac{M}{24n}\cdot s^2 + \frac{M}{2n}\cdot h^2 = \frac{M}{n}\cdot\left(\frac{s^2}{24}+\frac{h^2}{2}\right)$$

$$\triangle J_p = \frac{M}{2n}\cdot\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right)$$

Alle Dreiecke haben nun in bezug auf S dasselbe polare Trägheitsmoment, daher gilt für das ganze Polygon

$$\boldsymbol{J_p = \frac{M}{2}\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(202)}$$

Das geometrische, polare Trägheitsmoment des Polygons wird

$$\boldsymbol{J_p = \frac{F}{2}\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(203)}$$

Für den Kreis wird $s = 0$ und $h = \frac{d}{2}$, daher

$$\bigcirc J_p = \frac{M}{2}\left(\frac{d^2}{4}+0\right), \text{ somit}$$

$$\bigcirc \boldsymbol{J_p = \frac{M}{8}\,d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(204)}$$

Wird statt M die Fläche $\frac{\pi}{4}d^2$ gesetzt, so ergibt sich das geometrische, polare Trägheitsmoment des Kreises mit

$$\bigcirc \boldsymbol{J_p = \frac{\pi}{32}\,d^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(205)}$$

Für den Kreisring, Fig. 175, werden, wenn M die Masse des äußeren und m diejenige des inneren Kreises ist:

$$_{\text{mech}}J_p = \frac{M}{8}D^2 - \frac{m}{8}d^2 \text{ oder}$$

$$_{\textbf{mech}}\boldsymbol{J_p = \frac{1}{8}\left(M D^2 - m\, d^2\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(206)}$$

$${}_{\text{geom}}J_p = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}D^4 - \frac{\pi}{4}d^4\right) \quad \text{oder}$$

$$\mathbf{{}_{geom}J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(207)}$$

215. Das äquatoriale Trägheitsmoment eines regulären Polygons in bezug auf eine Schwerachse. Fig. 175.

Auflösung: Das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf die Achse $\overline{SA}$ ist ebenso groß wie in bezug auf die Achse $\overline{SF}$, weil dieselbe ebenfalls durch den Schwerpunkt und einen Eckpunkt des Polygons hindurchgeht. Ist nun $\overline{SA}$ gegen die Achse $\overline{SF}$ unter dem Winkel α geneigt und heißt das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf sie J_α, so ist $J_\alpha = J_x$.

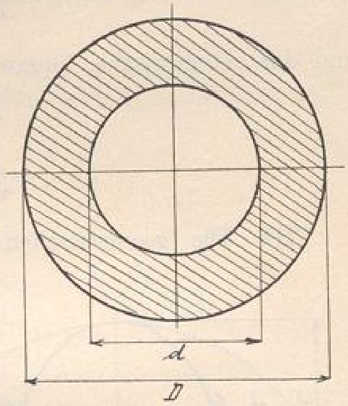

Fig. 175.

Somit wird laut Formel (180)

$$J_\alpha = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha = J_x \quad \text{oder}$$

$$J_x \cdot (1 - \cos^2\alpha) = J_y \cdot \sin^2\alpha, \text{ d. h.}$$

$$J_\alpha = J_x = J_y$$

Das Trägheitsmoment des Polygons in bezug auf jede durch Schwerpunkt und Eckpunkt gehende Achse wäre demnach konstant.

Für eine unter dem Winkel φ gegen die Achse $\overline{SF}$ geneigte Achse ergibt sich

$$J_\varphi = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi$$

Da $J_x = J_y$ ist, folgt

$$J_\varphi = J_x(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = J_x, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{J_x = J_y = J_\alpha = J_\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(208)}$$

„Das Trägheitsmoment eines regulären Polygons ist für jede Schwerachse gleich."

Da die Summe zweier äquatorialen Trägheitsmomente in bezug auf zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen das polare Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf den Schnittpunkt dieser Achsen als Pol ist, folgt

$$\frac{M}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = J_x + J_y = 2J_x, \text{ daher}$$

$$\mathbf{J_x = J_y = \frac{M}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(209)}$$

Das geometrische, äquatoriale Trägheitsmoment des Polygons ist dann

$$\mathbf{J_x = J_y = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(210)}$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist das mechanische, äquatoriale Trägheitsmoment wegen $s = 0$ und $h = \frac{d}{2}$

$$\mathbf{J = \frac{M}{16}d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(211)}$$

und das geometrische, äquatoriale

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 \quad \ldots \ldots \quad (212)$$

Für den ringförmigen Querschnitt ergibt sich das mechanische, äquatoriale Trägheitsmoment mit

$$J = \frac{M}{16} D^2 - \frac{m}{16} d^2 \quad \ldots \ldots \quad (213)$$

und das geometrische, äquatoriale mit

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 - \frac{\pi}{64} d^2 \text{ oder mit}$$

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \quad \ldots \ldots \quad (214)$$

216. Die geometrischen Trägheitsmomente einer Ellipse in bezug auf ihre Achsen zu suchen. Fig. 176.

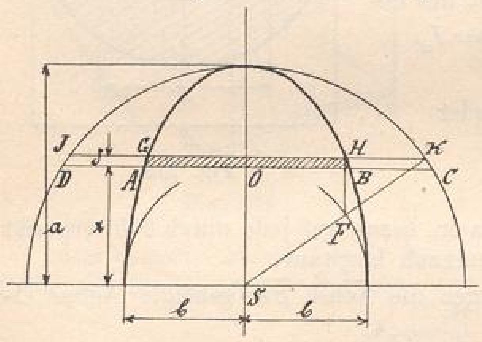

Fig. 176.

Auflösung: In bezug auf die kleine Achse ist das Trägheitsmoment des Flächenstreifens $ABGH$

$$\triangle J = \overline{AB} \cdot \delta \cdot x^2$$

Wegen $\overline{BO} : \overline{CO} = \overline{FS} : \overline{CS}$ oder

$$\overline{BO} : \overline{CO} = b : a \text{ ist}$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OB} = \frac{b}{a} \cdot \overline{CO}$$

$$\triangle J = \frac{b}{a} \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2$$

Das Trägheitsmoment der Ellipse in bezug auf die kleine Achse ist demnach

$$J = 2 \cdot \Sigma\left(\frac{b}{a} \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2\right)$$

$$J = \frac{b}{a} \cdot \Sigma(2 \cdot \overline{CO} \cdot \delta \cdot x^2)$$

$2 \cdot \overline{CO} \cdot \delta$ ist der Inhalt des dem Kreise angehörenden Flächenstreifens $DCJK$. — Daher wird

$$J = \frac{b}{a} \cdot \Sigma(DCJK \cdot x^2)$$

$$J = \frac{b}{a} \cdot J_{\circ} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{4} a^4$$

$$J = \frac{\pi}{4} a^3 b \quad \ldots \ldots \quad (215)$$

Ebenso findet man in bezug auf die große Achse

$$J_1 = \frac{\pi}{4} a \cdot b^3 \quad \ldots \ldots \quad (216)$$