UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 58. Trägheitsmomente von Körpern. Beispiele 217-221

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Visual Library

Das Trägheitsmoment des ersten Flächenstreifens f_1 in bezug auf $\overline{MN}$ ist $f_1 y_1^2$ —

Da $\triangle\, 01\, O \sim ab\, I$, folgt $y_1 : \frac{F}{2} = \overline{ab} : f_1$, so daß sich ergibt

$$f_1 y_1 = \overline{ab} \cdot \frac{F}{2} \text{ und}$$

$$f_1 y_1^2 = \overline{ab} \cdot \frac{F}{2} \cdot y_1$$

$\overline{ab} \cdot y_1$ ist die doppelte Fläche abI. Demnach wird

$$f_1 y_1^2 = F \cdot fl\, abI$$

Desgleichen . . . . . . $f_2 y_2^2 = F \cdot fl\, bcII$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_{10} y_{10}^2 = F \cdot fl\, klX$$

Somit ist das gesuchte Trägheitsmoment in bezug auf die Achse $\overline{MN}$

$$J = \Sigma (f y^2) = F \cdot fl\, (aI\, II \;.\;.\;.\;.\; X\, la)$$

Für die Schwerachse $\overline{AB}$ wird

$$J_s = J - F \cdot e^2$$

Da das Dreieck $a\, Al$ gleichschenklig ist, folgt

$$\overline{al} = 2\, e \text{ und}$$

$$fl\, A\, al = 2\, e \cdot \frac{e}{2} = e^2$$

Dann wird $J_s = J - Fe^2 = F \cdot fl\, (aI\, II \;.\;.\;.\; Xla) - F \cdot fl\, (A\, al)$

$$\boldsymbol{J_s = F \cdot F_o} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \textbf{(217)}$$

wenn die von den Seilpolygonseiten und den Verlängerungen der äußersten Seilpolygonseiten eingeschlossene Fläche F_o genannt wird.

§ 58. Trägheitsmomente von Körpern.

217. Das Trägheitsmoment eines Kreiszylinders in bezug auf seine Längsachse. Fig. 178.

Auflösung: Der Zylinder werde in unendlich dünne, konzentrische Schichten zerlegt. Das Trägheitsmoment einer solchen in der Entfernung ϱ von der Achse ist dann

$$\triangle J = \left[(2\, \pi\, \varrho \cdot \triangle\, \varrho)\, l \cdot \frac{\gamma}{g}\right] \cdot \varrho^2$$

Somit ist das Gesamtträgheitsmoment

$$J = 2 \pi\, l \frac{\gamma}{g} \cdot \Sigma (\varrho^3 \cdot \triangle\, \varrho)$$

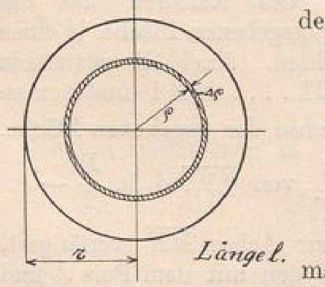

Fig. 178.

Der Ausdruck $\Sigma (\varrho^3 \cdot \triangle\, \varrho)$ ist leicht und folgendermaßen zu ermitteln. Eine quadratische Pyramide mit der Seite r werde im Abstande ϱ von der Spitze parallel zur Basis geschnitten, Fig. 179. Ein gleicher Schnitt werde in der Höhe $\triangle \varrho$ über letzterem geführt. Dann entsteht ein Körperchen mit quadratischer Basis, deren Seite ϱ ist, die Höhe desselben ist $\triangle \varrho$.

Die Summe der statischen Momente aller solchen unendlich kleinen Körperchen in bezug auf eine durch die Spitze der Pyramide parallel zur Basis liegenden Achse ist dann gleich dem statischen Momente der Pyramide selbst in bezug auf diese Achse, also

$$\Sigma[(\varrho^2 \cdot \triangle \varrho) \cdot \varrho] = r^2 \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{3}{4} r$$

$$\Sigma(\varrho^3 \cdot \triangle \varrho) = \frac{r^4}{4}$$

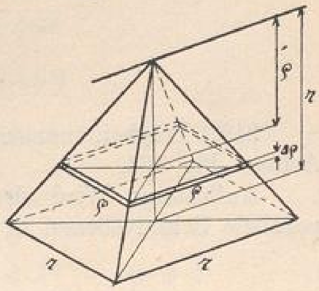

Fig. 179.

Somit wird . . . $J = \frac{2 \pi l \gamma}{g} \cdot \frac{r^4}{4}$; da $M = \frac{\pi r^2 l \gamma}{g}$ die Masse des Zylinders ist, wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{J = \frac{1}{2} M r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(218)}$$

218. Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf eine im Mittelpunkte der Höhe liegende und auf derselben senkrecht stehende Achse. Fig. 180.

Auflösung: Wird jede Zylinderhälfte durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnitte geteilt, so entstehen dünne Scheiben vom Inhalte $\frac{\pi r^2 \cdot l}{n}$. Jede derselben kann als Kreis mit dem Trägheitsmomente

$$\frac{m}{16} d^2 = \frac{m}{4} r^2 = \frac{\pi r^2 l \gamma}{n \cdot g} \cdot \frac{r^2}{4}$$

betrachtet werden [laut (211)].

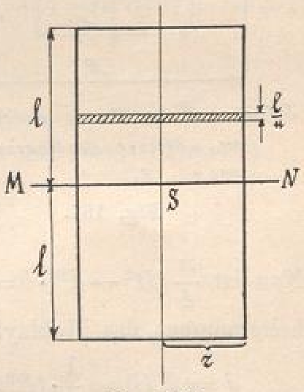

Fig. 180.

Demnach wird

$$J_s = 2\left\{\left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(\frac{2l}{n}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right] + \ldots . + \left[\frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(n \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \frac{r^2}{4}\right]\right\}$$

$$J_s = 2 \frac{\pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left\{n \frac{r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots . + n^2]\right\}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 \Big/_{n=\infty} = \frac{n^3}{3} \text{(s. § 27, Beisp. 112)}$$

$$J_s = \frac{2 \pi r^2 l \gamma}{gn} \cdot \left(n \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{n^3}{3}\right)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\text{Nun } M = \frac{\pi r^2 \cdot 2l \cdot \gamma}{g}, \text{ daher}$$

$$J_s = \frac{M}{n} \cdot \left(n \frac{r^2}{4} + \frac{l^2 n}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{J_s = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(219)}$$

219. Trägheitsmoment eines Hohlzylinders in bezug auf seine Höhe als Achse. Fig. 181.

Auflösung: Wird der Hohlzylinder durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnittebenen in Kreisringe zerlegt, so ist laut (206) das Trägheitsmoment eines solchen

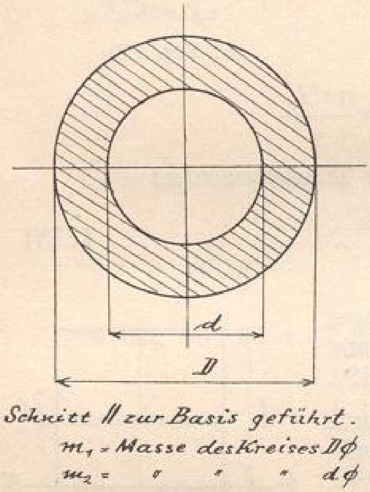

Fig. 181.

$$i = \frac{1}{8}(m_1 D^2 - m_2 d^2),$$

wenn m_1 und m_2 die Massen der ganzen und der inneren Kreisfläche bedeuten. Ist die Masse pro Flächeneinheit δ, so wird

$$i = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} D^2 \cdot \delta \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \delta \cdot d^2\right)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \delta \cdot \frac{\pi}{4}(D^4 - d^4)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,\delta \cdot (D^2 + d^2)$$

$$i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta \cdot 4\,(R^2 + r^2)$$

$$i = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta$$

Nun ist $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta = m$, die Masse des Kreisringes. Es wird das Trägheitsmoment des Hohlzylinders dann

$$J = \Sigma(i) = \frac{1}{2} \cdot (R^2 + r^2) \cdot \Sigma\left[\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \delta\right] = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot \Sigma(m)$$

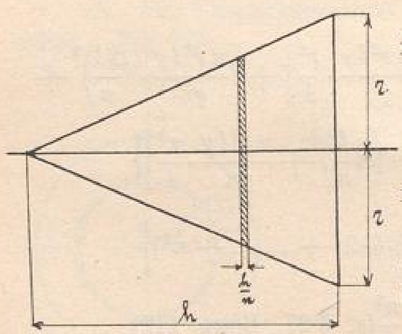

Fig. 182.

Ist M die Masse des Hohlzylinders, so ist endlich

$$\boldsymbol{J = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2)} \quad . \quad \mathbf{(220)}$$

220. Trägheitsmoment eines Kreiskegels in bezug auf die Höhe als Achse. Fig. 182.

Auflösung: Der Kegel werde durch unendlich viele, zur Basis parallele Schnitte in Scheiben zerlegt. Jede solche kann als ein Kreis betrachtet werden. Die Inhalte der einzelnen Scheiben sind

$$\left(\frac{r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}, \quad \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \pi \cdot \frac{h}{n}, \quad \left(\frac{3r}{n}\right)^2 \cdot \pi \frac{h}{n}, \quad \ldots \quad \left(\frac{nr}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}$$

Die Trägheitsmomente derselben sind

$$\left(\frac{r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2,\quad \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \pi \frac{h}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2r}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots$$

Demnach wird das Trägheitsmoment des ganzen Kegels

$$J = \frac{\pi r^4 h \gamma}{2n^5\cdot g}\cdot(1^4+2^4+\ldots\ldots+n^4)$$

Die Summe in der Klammer kann erst bestimmt werden, wenn $1^3+2^3+ + \ldots + n^3$ gefunden ist.

Es gilt

$$\begin{array}{lrlllll}
 & (n+1)^4 = & n^4 & +4n^3 & +6n^2 & +4n & +1 \\
\hline
n=0 \ldots\ldots\ldots & 1^4 = & 0 & +0 & +0 & +0 & +1 \\
n=1 \ldots\ldots\ldots & 2^4 = & 1^4 & +4\cdot 1^3 & +6\cdot 1^2 & +6\cdot 1 & +1 \\
n=2 \ldots\ldots\ldots & 3^4 = & 2^4 & +4\cdot 2^3 & +6\cdot 2^2 & +6\cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n \ldots (n-1) \ldots\ldots & n^4 = & (n-1)^4 & +4(n-1)^3 & +6(n-1)^2 & +4(n-1) & +1 \\
n \ldots n \ldots\ldots & (n+1)^4 = & n^4 & +4n^3 & +6n^2 & +4n & +1 \\
\hline
\end{array}$$

$$1^4+\ldots\ldots+n^4\,(n+1)^4 = 1^4+\ldots+n^4+4(1^3+\ldots+n^3)+6(1^2+\ldots+n^2)+ \\ +4(1+\ldots+n)+(n+1)$$

$$(n+1)^4 = 4(1^3+\ldots+n^3)+6\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+4\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{(n+1)^4}{4}-\frac{n}{4}(n+1)(2n+1)-\frac{n}{2}(n+1)-\frac{n+1}{4}$$

$$= \frac{n+1}{4}(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)$$

$$= \frac{n+1}{4}(n^3+n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Nun ebenso

$$\begin{array}{lrlllll}
 & (n+1)^5 = & n^5 & +5n^4 & +10n^3 & +10n^2 & +5n & +1 \\
\hline
n=0 \ldots\ldots\ldots & 1^5 = & 0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +1 \\
n=1 \ldots\ldots\ldots & 2^5 = & 1^5 & +5\cdot 1^4 & +10\cdot 1^3 & +10\cdot 1^2 & +5\cdot 1 & +1 \\
n=2 \ldots\ldots\ldots & 3^5 = & 2^5 & +5\cdot 2^4 & +10\cdot 2^3 & +10\cdot 2^2 & +5\cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n \ldots (n-1) \ldots & n^5 = & (n-1)^5 & +5(n-1)^4 & +10(n-1)^3 & +10(n-1)^2 & +5(n-1) & +1 \\
n \ldots n \ldots & (n+1)^5 = & n^5 & +5n^4 & +10n^3 & +10n^2 & +5n & +1 \\
\hline
\end{array}$$

$$1^5+\ldots+(n+1)^5 = 1^5+\ldots+n^5+5(1^4+\ldots+n^4)+10(1^3+\ldots+n^3)+ \\ +10(1^2+\ldots+n^2)+5(1+\ldots+n)+(n+1)$$

$$(n+1)^5 = 5(1^4+\ldots+n^4)+10\frac{n^2(n+1)^2}{4}+10\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+ \\ +5\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{2n^2(n+1)^2}{4}-2\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-$$

$$-\frac{n}{2}(n+1)+\frac{n+1}{5}$$

$$=\frac{n+1}{30}\left[6(n+1)^4-15n^2(n+1)-10n(2n+1)-15n-6\right]$$

$$=\frac{n+1}{30}(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-15n^2-20n^2-10n-15n-6)$$

$$=\frac{n+1}{30}(6n^4+9n^3+n^2-n)=\frac{6n^5+9n^4+n^3-n^2+6n^4+9n^3+n^2-n}{30}$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

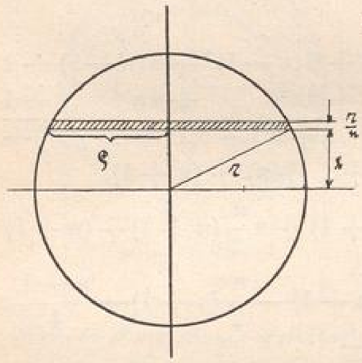

Fig. 183.

Daher wird

$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2n^5\cdot g}\cdot\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)$$

$$=\frac{\pi r^4 h\gamma}{2g}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{30}\right)$$

$$J=\frac{\pi r^4 h\gamma}{10g}\quad \text{für } n=\infty$$

$$M=\frac{\pi r^2 h\gamma}{3g};\quad \frac{J}{M}=\frac{3}{10}r^2$$

$$\boldsymbol{J=\frac{3}{10}Mr^2}\quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(221)}$$

221. Das Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf eine Schwerachse zu finden. Fig. 183.

Auflösung: Jede Halbkugel werde durch unendlich viele, parallele Schnittebenen senkrecht zur Trägheitsachse in Kreisscheiben zerlegt. Das polare Trägheitsmoment einer solchen ist dann

$$\triangle J=\varrho^2\pi\cdot\frac{r}{n}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{1}{2}\varrho^2=(r^2-x^2)\cdot\pi\cdot\frac{r\gamma}{ng}\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

Das Trägheitsmoment der Halbkugel wird daher

$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\left\{\left[r^2-\left(\frac{r}{n}\right)^2\right]^2+\left[r^2-\left(\frac{2r}{n}\right)^2\right]^2+\left[r^2-\left(\frac{3r}{n}\right)^2\right]^2+\ldots\left[r^2-\left(\frac{nr}{n}\right)^2\right]^2\right\}$$

$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\left[nr^4-2r^2\cdot\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot(1^2+\ldots+n^2)+\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot(1^4+\ldots+n^4)\right]$$

$$J=\frac{\pi r\gamma}{2ng}\cdot\left[nr^4+\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)-\frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right]$$

$$\underset{n=\infty}{J}=\frac{\pi r\gamma}{2g}\cdot\left[r^4+\frac{r^4}{5}-\frac{2r^4}{3}\right]=\frac{\pi r^5\gamma}{2g}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)$$

$$J=\frac{8}{15}\cdot\frac{\pi r^5\gamma}{2g}=\frac{4}{15}\frac{\pi r^5\gamma}{g}$$

Für die ganze Kugel ist daher

$$J = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi r^5 \gamma}{g}$$

$$M = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r^3 \gamma}{g}$$

$$\frac{J}{M} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} r^2 = \frac{2}{5} r^2$$

$$\boldsymbol{J = \frac{2}{5} M r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(222)}$$

§ 59. Beispiele über die gleichförmig rotierende Bewegung starrer Körper um eine feste Achse.

222. Auf einer Welle mit dem Radius r sitzt eine Scheibe mit dem Radius R. Wie viele Touren macht diese Scheibe, bis die Bewegung durch den Reibungswiderstand in den Lagern der Welle aufgehoben ist, wenn im Momente der Betrachtung die Umfangsgeschwindigkeit der letzteren c beträgt und der Reibungskoeffizient φ ist? Die Wellenmasse ist nicht zu berücksichtigen.

Auflösung: Die lebendige Kraft der Scheibe ist $\frac{\omega^2}{2} \cdot J$, die Arbeit des Reibungswiderstandes an den beiden Zapfen bis zum Eintreten des Ruhezustandes $\varphi G \cdot x$, wenn bis dahin ein Punkt des Zapfenumfanges den Weg x beschreibt. Es muß demnach sein

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot J = \varphi \cdot G \cdot x$$

$$\frac{c^2}{2 r^2} \cdot \frac{G}{2 g} R^2 = \varphi G x$$

$$\frac{c^2}{4 r^2} \cdot \frac{G}{g} \cdot R^2 = \varphi G x$$

$$x = \frac{c^2 \cdot R^2}{4 \varphi g r^2} = 2 r \pi n,$$

wenn n die verlangte Tourenzahl ist

$$n = \frac{c^2 \cdot R^2}{4 \varphi g r^2 \cdot 2 r \pi}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{c^2 \cdot R^2}{8 \varphi g \cdot \pi \cdot r^3}}$$

223. Ein starrer Körper dreht sich n mal in der Minute um eine feste Achse. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?

Auflösung: $$\omega = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot n}{60}$$

$$\omega = \frac{\pi \boldsymbol{n}}{\mathbf{30}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(223)}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN