Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 60. Beispiele über die beschleunigt rotierender Bewegung starrer Körper. Beispiele 226-234

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

In dieser Gleichung sind $m=\frac{5,5}{9,81}$, $M=\frac{2}{9,81}$ und x der Weg, welchen ein Punkt eines Zapfenumfangs beschreibt, bis Ruhe eintritt.

Es folgt dann weiter

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\cdot\left[\frac{5,5}{2\cdot 9,81}\cdot 0,04^2+\frac{2}{2\cdot 9,81}\cdot(0,05^2+0,04^2)\right]=0,03\cdot 7,5\cdot x$$

$$x=\frac{\pi^2\cdot 1500^2\cdot\left[\frac{5,5}{2\cdot 9,81}\cdot 0,0016+\frac{1}{9,81}\cdot 0,0041\right]}{2\cdot 900\cdot 0,03\cdot 7,5}$$

π^2 kann gegen 9,81 gekürzt werden, so daß sich ergibt

$$x=\frac{1500^2\cdot[5,5\cdot 0,0016+2\cdot 0,0041]}{4\cdot 900\cdot 0,03\cdot 7,5}$$

$$x=\frac{22\,500\cdot 0,017}{36\cdot 0,03\cdot 7,5}$$

$$x\sim 47\text{ m}$$

47 m ist der Weg einer gleichförmig verzögerten Bewegung

$$47=\frac{c+v}{2}\cdot t=\frac{c}{2}\cdot t$$

$$47=0,5\cdot\frac{0,015\cdot\pi\cdot 1500}{60}\cdot t=0,59\,t$$

$$\boldsymbol{t\sim 80\text{ Sek.}\sim 1\text{ Min. } 20\text{ Sek.}}$$

§ 60. Beispiele über die beschleunigt rotierende Bewegung starrer Körper.

226. Ein horizontal und zentrisch gelagerter, voller, homogener Zylinder mit $r=40$ cm Durchmesser und $G=2000$ kg Gewicht wird durch eine Umfangskraft $P=50$ kg angetrieben. Wie lange dauert es, bis er $n=120$ Touren macht? $g\sim 10$ m.

α) Ohne Rücksicht auf die Zapfenreibung.

β) Mit Rücksicht auf dieselbe. — Zapfenreibungskoeffizient $\varphi=0,1$. — Zapfendurchmesser $d=60$ mm.

Auflösung ad a): $D=\varepsilon\cdot J$

$$\varepsilon=\frac{50\cdot 0,2}{\frac{2000}{10\cdot 2}\cdot 0,04}=\frac{10}{4}=2,5$$

Die Bahnbeschleunigung ist $p=r\cdot\varepsilon=0,2\cdot 2,5=0,5$

Dann $v=\frac{2\,r\,\pi\,n}{60}=\frac{0,4\,\pi\,n}{60}=\frac{0,4\,\pi\cdot 120}{60}$

$$v\sim 2,5\text{ m}$$

$$2,5=p\cdot t$$

$$t=\frac{2,5}{0,5}$$

$$\boldsymbol{t\sim 5\text{ Sek.}}$$

ad b):

$$D = 50 \cdot 0{,}2 - \varphi \cdot 2000 \cdot 0{,}03 = 4$$

$$\varepsilon = \frac{4}{\frac{2000}{2 \cdot 10} \cdot 0{,}04} = \frac{4}{4} = 1$$

$$p = r \cdot \varepsilon = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$$

$$v = \frac{2\, r\, \pi\, n}{60} \sim 2{,}5 \text{ m}$$

$$2{,}5 = p \cdot t$$

$$t = \frac{2{,}5}{0{,}2}$$

$$\boldsymbol{t \sim 12{,}5} \textbf{ Sek.}$$

227. Um einen Kreiszylinder vom Halbmesser r, der sich um eine horizontale Achse reibungsfrei drehen kann, ist ein Faden geschlungen, der an seinem freien Ende ein Gewicht $G = mg$ trägt. Welche Fadenspannung, Winkelbeschleunigung entstehen, welche Endgeschwindigkeit hat das Gewicht, wenn es die Höhe h gefallen ist, und welche Zeit ist hierzu nötig? Der Zylinder habe das Trägheitsmoment J. — Fig. 186.

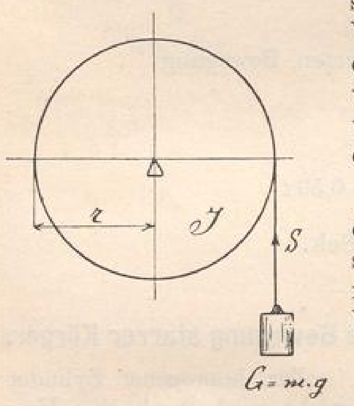

Fig. 186.

Auflösung: Das Gewicht G ruft im Faden die Spannung S hervor. Letztere bewirkt, da sie konstant ist, eine gleichförmig beschleunigte, rotierende Bewegung des Zylinders. Die Winkelbeschleunigung desselben ε wird daher aus

$$S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot r}{J}$$

Die Kraft $(G - S)$ beschleunigt die Masse m, so daß deren Beschleunigung

$$p = \frac{G - S}{m} = r \cdot \varepsilon$$

wird. Somit ist

$$\varepsilon = \frac{G - S}{m\, r} = \frac{S \cdot r}{J}$$

$$(G - S) \cdot J = m\, S \cdot r^2$$

$$G \cdot J - S \cdot J = m\, S \cdot r^2$$

$$S\,(m\, r^2 + J) = G \cdot J$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G \cdot J}{m\, r^2 + J}}$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot r}{J} = \frac{G \cdot J}{m\, r^2 + J} \cdot \frac{r}{J}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{G \cdot r}{m\, r^2 + J}}$$

Laut Satz von der Energie in § 49 ist weiter

$$A = G \cdot h = J\frac{\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$G \cdot h = J\frac{v^2}{2\,r^2} + m\frac{v^2}{2}$$

$$G \cdot h = \frac{v^2}{2\,r^2}(J + m\,r^2)$$

$$\boldsymbol{v = r \cdot \sqrt{\frac{2\,G\,h}{J + m\,r^2}}}$$

$$p = r \cdot \varepsilon = r \cdot \frac{G \cdot r}{m\,r^2 + J} = \frac{G \cdot r^2}{J + m\,r^2} \quad \text{und} \quad v = p \cdot t$$

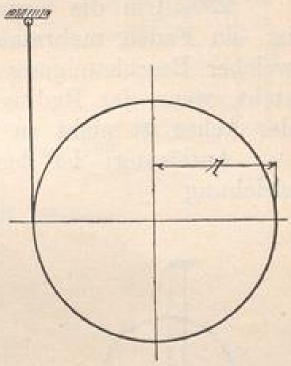

Fig. 187.

$$t = \frac{v}{p} = \frac{r \cdot \sqrt{\frac{2\,G \cdot h}{J + m\,r^2}}}{\frac{G \cdot r^2}{J + m\,r^2}}$$

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{2\,G \cdot h\,(J + m\,r^2)}}{G \cdot r^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{2\,G\,h\,(J + m\,r^2)}}{G \cdot r}$$

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2\,h\,(J + m\,r^2)}{G \cdot r}}}$$

228. Wie groß müßte G sein, damit die Fallbeschleunigung $p = \frac{g}{2}$ werde?

Auflösung: $$p = \frac{G \cdot r^2}{J + m\,r^2} = \frac{G \cdot r^2}{J + \frac{G}{g} \cdot r^2} = \frac{g}{2}$$

$$2\,G \cdot r^2 = J \cdot g + \frac{G}{g}\,r^2 \cdot g$$

$$G\,r^2 = J\,g$$

$$\boldsymbol{G = \frac{J \cdot g}{r^2}}$$

229. Um einen Zylinder ist ein Faden mehrmals gewickelt und dessen freies Ende aufgehängt. Mit welcher Beschleunigung fällt der Zylinder und wie groß ist die Spannung im Faden? Fig. 187.

Auflösung: Die Energie des Zylinders nach Fallen um die Höhe h ist

$$m\,g\,h = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{J\,\omega^2}{2} = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{m\,r^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{3}{4}\,m\,v^2$$

$$m\,g\,h = \frac{3}{4}\,m\,v^2$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\,g\right) h}}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{3}\,g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(224)}$$

d. h. der Zylinder fällt mit einer Beschleunigung, welche gleich $^2/_3$ der Erdbeschleunigung ist. Ursache dafür ist der Drehungszwang des Zylinders.

$$\text{Nun ist} \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} = \frac{M}{J} = \frac{S \cdot r}{\frac{m r^2}{2}}$$

$$\text{woraus } S = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} \cdot \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \text{ folgt.}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(225)}$$

d. h. die Fadenspannung ist gleich dem dritten Teil des Zylindergewichtes.

230. Um die horizontale Achse eines Zylinders mit dem Gewichte $G\,kg$ ist ein Faden mehrmals gewickelt und dessen freies Ende aufgehängt. Mit welcher Beschleunigung p fällt der Zylinder und welche Fadenspannung entsteht, wenn der Radius der Achse ϱ und der des Zylinders r ist? Die Masse der Achse ist nicht zu berücksichtigen. — Fig. 188.

Auflösung: Ist der Zylinder die Höhe h gefallen, so lautet die Arbeitsgleichung

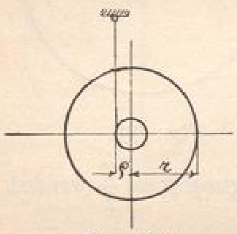

Fig. 188.

$$G \cdot h = \frac{m v^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot J$$

$$G \cdot h = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\varrho^2} \cdot \frac{G}{2 g} r^2$$

$$g h = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{v^2}{\varrho^2} \cdot r^2 = v^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2} \right)$$

$$g h = v^2 \frac{r^2 + 2 \varrho^2}{4 \varrho^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4 \varrho^2 \cdot g h}{r^2 + 2 \varrho^2}}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2 \left(\frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} g \right) h}}$$

Die Beschleunigung, mit welcher der Zylinder fällt, wird also

$$\boldsymbol{p = \frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(226)}$$

Wäre z. B. $r = 4 \varrho$, so würde folgen $p = \frac{2 \varrho^2}{18 \varrho^2} \cdot g = \frac{1}{9} g$; der Zylinder würde dann neunmal so langsam fallen, als wenn er frei fiele.

Die Winkelbeschleunigung des Zylinders wird dann

$$\varepsilon = \frac{p}{\varrho} = \frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g = \frac{D}{J}$$

$$\frac{2 \varrho^2}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g = \frac{S \cdot \varrho}{\frac{m r^2}{2}}$$

$$S = \frac{m r^2 \cdot \varrho}{r^2 + 2 \varrho^2} \cdot g$$

Da $m g = G$ ist, wird somit

$$\boldsymbol{S = G \cdot \frac{r^2}{r^2 + 2\varrho^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(227)}$$

Für $r = 4\varrho$ wird $S = \frac{8}{9} G$, d. h. größer als im vorigen Falle.

231. Um einen Zylinder ist ein Faden gewickelt und dessen ablaufendes Ende am höchsten Punkte einer h Meter hohen und mit dem Horizonte den Winkel α bildenden schiefen Ebene befestigt. Mit welcher Beschleunigung rollt der Zylinder die schiefe Ebene herunter und wie groß ist die entstehende Fadenspannung? Fig. 189.

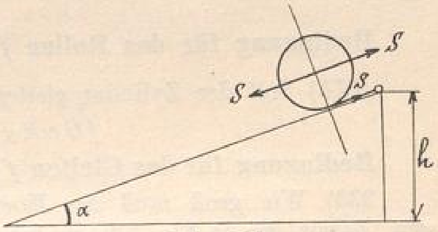

Fig. 189.

Auflösung: Man denke sich im Zylindermittel zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte S angebracht. Die nach abwärts wirkende gibt mit der Fadenspannung S das den Zylinder nach abwärts rollende Kräftepaar, die nach aufwärts wirkende verringert die Wirkung von $G \sin\alpha$. — Laut Beschleunigungsgesetz gilt dann

$$G \sin\alpha - S = \frac{G}{g} \cdot r\,\varepsilon,$$

$$\text{hierzu } S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

Aus letzterer Gleichung ergibt sich

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r}$$

Wird dieser Wert in die obere Gleichung substituiert, so erhält man

$$G \sin\alpha - \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{G}{g} \cdot r\,\varepsilon$$

$$G \sin\alpha = \varepsilon \left(\frac{G}{g} \cdot r + \frac{J}{r}\right)$$

$$G \sin\alpha = \varepsilon \cdot G \left(\frac{r}{g} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g}\, r^2\right)$$

$$\sin\alpha = \varepsilon \left(\frac{r}{g} + \frac{r}{2g}\right)$$

$$g \sin\alpha = \varepsilon \cdot \frac{3}{2} r$$

$$r \cdot \varepsilon = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{3} g \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(228)}$$

$$S = \frac{\frac{2}{3} g \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} r^2}{r^2}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{G}{3} \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(229)}$$

232. Wie lauten die Bedingungen dafür, daß ein Zylinder von einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene a) herunterrolle, b) heruntergleite, wenn der Koeffizient der gleitenden Reibung f ist?

Auflösungen: *Ad a)* Genau so wie in der vorhergehenden Aufgabe die Fadenspannung S die drehende Bewegung des Zylinders zustande gebracht hat, wird hier das Rollen desselben durch die Reibung zwischen ihm und der schiefen Ebene bewirkt, wenn die Beziehung besteht,

$$f\,G\cos\alpha \geqq \frac{G}{3}\sin\alpha$$

Bedingung für das Rollen $f \geqq \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ . . . . **(230)**

Ad b) Soll der Zylinder gleiten, so muß die Beziehung lauten

$$f\,G\cos\alpha \leqq G\sin\alpha$$

Bedingung für das Gleiten $f \leqq \mathrm{tg}\,\alpha$ . . . . **(230a)**

233) Wie groß muß der Koeffizient der gleitenden Reibung mindestens sein, damit der in Fig. 190 gezeichnete Zylinder mit seinen beiden Endzapfen auf 2 unter Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebenen herabrolle?

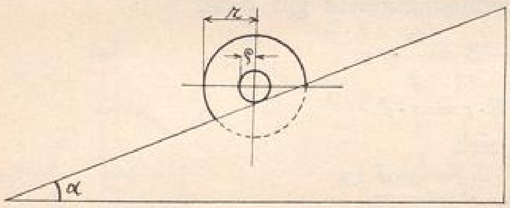

Fig. 190.

Auflösung: Man denke sich um die Zapfen je einen Faden gewickelt und deren freie Enden befestigt. Die in beiden letzteren entstehenden Spannungen seien zusammen S. — Dann gelten wieder die Gleichungen

$$G\cdot\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\cdot\varrho\,\varepsilon$$

$$\text{und } S\cdot\varrho = \varepsilon\cdot J$$

Es handelt sich um die Bestimmung von S.

$$\varepsilon = \frac{S\cdot\varrho}{J}$$

$$G\cdot\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\cdot\varrho\cdot\frac{S\cdot\varrho}{J}$$

$$G\cdot\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\cdot\varrho^2\cdot\frac{S}{\frac{G}{2g}\cdot r^2}$$

$$G\sin\alpha = S + S\cdot\frac{2\varrho^2}{r^2} = S\left(1+\frac{2\varrho^2}{r^2}\right)$$

$$G\sin\alpha = S\cdot\frac{r^2+2\varrho^2}{r^2}$$

$$S = \frac{r^2\cdot\sin\alpha}{r^2+2\varrho^2}\cdot G$$

Die Bedingung für das Rollen ist nun

$$\frac{r^2\sin\alpha}{r^2+2\varrho^2}\cdot G \geqq f\cdot G\cos\alpha$$

$$f \leqq \frac{r^2}{r^2+2\varrho^2}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$$