Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 61. Bewegung eines physischen Pendels. Beispiele 239-244

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

234. Mit welcher Beschleunigung rollt eine Kugel unter dem Einfluß der Reibung von einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene herunter und unter welcher Bedingung findet dies statt?

Auflösung: Die Reibung kann wieder ersetzt werden durch die Fadenspannung S, so daß sich die Gleichungen schreiben lassen,

$$G \sin \alpha - S = \frac{G}{g} \cdot r \varepsilon$$

$$S \cdot r = \varepsilon \cdot J$$

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r}$$

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{G}{g} \cdot r \varepsilon$$

$$G \sin \alpha - \frac{\varepsilon}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{G}{g} \cdot r^2 = \frac{G}{g} r \varepsilon$$

$$g \sin \alpha = \frac{2}{5} r \varepsilon + r \varepsilon = \frac{14}{10} r \varepsilon = \frac{7}{5} r \varepsilon$$

$$\boldsymbol{p = r \varepsilon = \frac{5}{7} g \sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(231)}$$

Die Fadenspannung muß ebenfalls gesucht werden, da ihre Größe zur Beantwortung der andern Frage nötig ist.

$$S = \frac{\varepsilon \cdot J}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{g \sin \alpha}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{G}{g} r^2$$

$$\boldsymbol{S = \frac{2}{7} G \sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(232)}$$

Die Bedingung dafür, daß ein Rollen der Kugel stattfinde, ist daher

$$\frac{2}{7} G \sin \alpha = f \cdot G \cos \alpha,$$

woraus sich ergibt

$$\boldsymbol{f = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(233)}$$

Auf Grund der in diesem § gezeigten Beispiele können nun schwierigere Aufgaben über gleichzeitig erfolgende gleitende und rollende Bewegung einfacher und zusammengesetzter Körper leicht durchgeführt werden.

§ 61. Bewegung eines physischen Pendels.

Jeder um eine feste Achse schwingender Körper heißt ein **physisches oder zusammengesetztes Pendel**, Fig. 191.

Das Moment des Pendelgewichtes Mg in bezug auf seinen Drehpunkt O ist

$$Mg \cdot s \cdot \sin \delta,$$

wenn s die Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte und δ die jeweilige Elongation bedeuten.

Die Winkelbeschleunigung eines rotierenden Körpers ist nun laut (177) das Verhältnis aus Drehmoment und dessen Trägheitsmoment, also hier beim physischen Pendel

$$\varepsilon_1 = \frac{M g s \cdot \sin\delta}{J_o}$$

Ein mathematisches Pendel mit der Länge $\overline{OK} = l$ schwinge ebenfalls um O; seine Winkelbeschleunigung ist

$$\varepsilon_2 = \frac{mg \cdot l \cdot \sin\delta}{ml^2}$$

Soll nun das physische Pendel genau so schwingen wie das mathematische, dann muß sein

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \text{ oder}$$

$$\frac{Mg \cdot s \cdot \sin\delta}{J_o} = \frac{mgl \cdot \sin\delta}{ml^2}, \text{ d. h.}$$

$$l = \frac{J_o}{Ms} = \frac{\textbf{Trägheitsmoment}}{\textbf{Statisches Moment}} \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(234)}$$

„Jene Länge eines physischen Pendels, bei welcher dasselbe dieselbe Schwingungsdauer besitzt wie ein mathematisches, heißt **reduzierte Länge des physischen Pendels.**“

Hier ist also l die reduzierte Länge. —

„Jener Punkt eines physischen Pendels, welcher um die reduzierte Pendel-

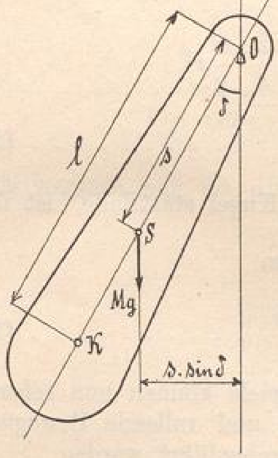

Fig. 191.

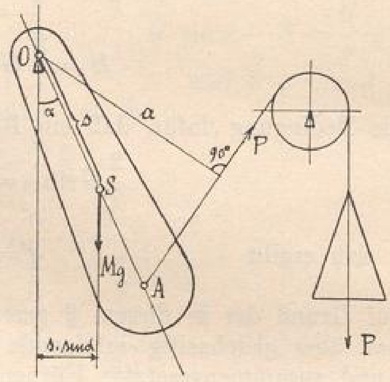

Fig. 192.

länge von der Schwingungsachse absteht, heißt der **Schwingungsmittelpunkt des physischen Pendels.**“

Somit wird die **Schwingungsdauer eines physischen Pendels**

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_o}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{\textbf{Reduzierte Länge}}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(235)}$$

Mittels letzterer Gleichung kann man das Trägheitsmoment von Körpern experimentell wie folgt ermitteln.

Man bringe die Schwingungsachse O an, Fig. 192, und befestige in irgend einem Punkte A des Körpers einen Faden. Der letztere wird nun über eine

Rolle geführt und an seinem freien Ende eine Wagschale angehängt. Wird in diese ein Gewicht P gelegt, so stellt sich die Achse des Körpers unter Winkel α gegen die Vertikale ein, und es folgt

$$G \cdot s \cdot \sin\alpha = P \cdot a$$

$$G \cdot s = \frac{P \cdot a}{\sin\alpha}$$

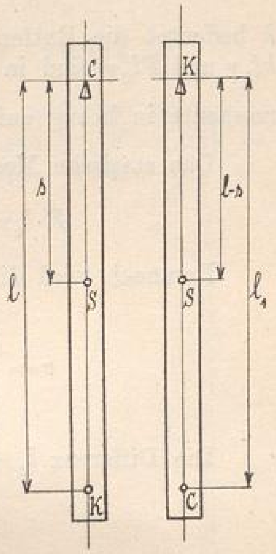

Fig. 193.

Das statische Moment des Körpers ist also bestimmt. Selbstredend muß die Lage des Schwerpunktes des letzteren gegeben sein.

Da $t^2 = \pi^2 \cdot \frac{J_o}{Mgs}$ ist, wird

$$J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot Mgs \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{J_o = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot \frac{P \cdot a}{\sin\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(236)}$$

In Fig. 193 ist ein physisches Pendel mit dem Aufhängepunkt C und dem Schwingungsmittelpunkt K dargestellt. Dann gilt

$$l = \frac{J_C}{M \cdot s} = \frac{J_S + Ms^2}{M \cdot s} = \frac{J_S}{M \cdot s} + s$$

Wird nun das Pendel in K aufgehängt, so werden $\overline{KS} = (l - s)$ und das statische Moment $M\,(l - s)$. Die reduzierte Pendellänge ergibt sich jetzt mit

$$l_1 = \frac{J_K}{M\,(l-s)} = \frac{J_S + M\,(l-s)^2}{M\,(l-s)} = \frac{J_S}{M\,(l-s)} + (l-s)$$

Fig. 194.

Aus obiger Beziehung für l folgt

$$l - s = \frac{J_S}{M \cdot s}, \text{ daher wird}$$

$$l_1 = \frac{J_S + M \cdot \left(\frac{J_S}{M \cdot s}\right)^2}{M \cdot \frac{J_S}{M \cdot s}} = s + \frac{J_S}{M \cdot s}, \text{ d. h.}$$

$$l_1 = l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(237)}$$

Die reduzierte Pendellänge ist dieselbe wie früher, also schwingt das Pendel in beiden Fällen gleich.

„Ein Pendel, bei welchem man Schwingungsmittelpunkt und Aufhängepunkt vertauschen kann, ohne daß sich die Schwingungsdauer ändert, heißt ein **Reversionspendel.**"

Beispiele.

235. Wo ist die Schwingungsachse eines 0,3 m langen, homogenen, prismatischen Stabes mit dem Querschnitte F anzubringen, damit seine Schwingungszeit eine halbe Sekunde betrage? Fig. 194.

Auflösung: Die Schwingungsachse sei C und der Stab hat dann in bezug auf C das Trägheitsmoment

$$Mk^2 = \frac{1}{3}(Fl_1\gamma)\cdot l_1^2 + \frac{1}{3}(Fl_2\gamma)\,l_2^2 = \frac{1}{3}F\gamma\,(l_1^3 + l_2^3)$$

k bedeutet die Entfernung des Schwerpunktes des Stabes von C; die Massen $kl_1\gamma$ und $Fl_2\gamma$ sind in A und B konzentriert gedacht, so daß ihre Trägheitsmomente in bezug auf $C \ldots \frac{1}{3}F\cdot l_1\gamma\cdot l_1^2$ und $\frac{1}{3}F\cdot l_2\gamma\cdot l_2^2$ werden.

Das statische Moment des Stabes ist

$$F\cdot l_1\gamma\cdot\frac{l_1}{2} - F\cdot l_2\cdot\gamma\cdot\frac{l_2}{2} = \frac{1}{2}F\cdot\gamma\,(l_1^2 - l_2^2)$$

Demnach wird die reduzierte Pendellänge

$$r = \frac{\frac{1}{3}\cdot F\gamma\,(l_1^3 + l_2^3)}{\frac{1}{2}F\gamma\,(l_1^2 - l_2^2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}{l_1 - l_2}$$

Die Differenz $l_1 - l_2$ sei gleich d.

$$l_1 + l_2 = l$$
$$l_1 - l_2 = d$$
$$l_1 = \frac{l+d}{2}$$
$$l_2 = \frac{l-d}{2}$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{l+d}{2}\right)^2 - \frac{l^2-d^2}{4} + \left(\frac{l-d}{2}\right)^2}{d} = \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2+2ld+d^2-l^2+d^2+l^2-2ld+d^2}{4d}$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2+3d^2}{4d}$$

$$r = \frac{l^2+3d^2}{6d}$$

$$\frac{1}{2} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$\frac{1}{4} = \pi^2\frac{r}{g}$$

$$r = \frac{1}{4}\cdot\frac{g}{\pi^2} = 0{,}248\text{ m}$$

$$0{,}248 = \frac{l^2+3d^2}{6d}$$

$$0{,}248 = \frac{0{,}09+3d^2}{6d};\qquad 1{,}488d = 0{,}09 + 3d^2$$

$$d^2 - 0{,}496d + 0{,}03 = 0$$

$$d = 0{,}248 \pm \sqrt{0{,}248^2 - 0{,}03}$$

$$d = 0{,}248 \pm 0{,}177$$

Das Pluszeichen hat keinen Sinn, denn es würde $d > l$ sein; daher brauchbare Lösung $d = 0{,}071$ m

$$l_1 = \frac{l+d}{2} = \frac{0{,}03 + 0{,}071}{2} = \frac{0{,}371}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{l_1 = 0{,}186\ m}$$

$$l_2 = \frac{l-d}{2} = \frac{0{,}03 - 0{,}071}{2} = \frac{0{,}229}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{l_2 = 0{,}114\ m}$$

236. An einer $l = 0{,}4$ m langen und $G = 0{,}05$ kg schweren Stange ist eine Kugel mit dem Radius $r_1 = 0{,}04$ m und einem Gewichte $K = 2$ kg befestigt. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieses Pendels, wenn es um das freie Ende der Stange schwingt? Fig. 195.

Auflösung:

$$r = \frac{\frac{1}{3} G l^2 + K \left[\frac{2}{5} r_1{}^2 + (l + r_1)^2\right]}{\frac{1}{2} G l + K (l + r_1)}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}16 + 2 \left[0{,}44^2 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}04^2\right]}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}44}$$

$$r = 0{,}4394 \text{ m}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$t = 1{,}003 \cdot \sqrt{0{,}4394}$$

$$\mathbf{t = 0{,}665\ Sek.}$$

Fig. 195.

237. Wie groß ist die Schwingungsdauer einer rechteckigen Scheibe $a'b'c'd'$ mit der Höhe $\overline{a'b'}$ und Breite $\overline{a'c'}$, ferner der Masse m, wenn der Drehpunkt im Mittel der Seite $\overline{a'c'}$ liegt? Fig. 196.

Auflösung: $J_1 = \frac{m}{12} b^2, \quad J_2 = \frac{m}{12} h^2$

$$J_p = \frac{m}{12} d^2$$

$$J = J_p + m \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{m}{12} d^2 + m \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$$

$$r = \frac{\frac{m}{12} d^2 + m \frac{h^2}{4}}{m \cdot \frac{h}{2}} = \frac{m d^2 + 3 m h^2}{6 m h}$$

$$r = \frac{d^2 + 3 h^2}{6 h}$$

$$\mathbf{t = \pi \sqrt{\frac{d^2 + 3 h^2}{6 g h}}}$$

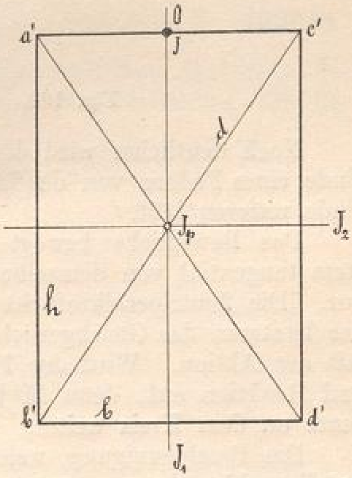

Fig. 196.