Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 62. Zentrifugalkraft. Beispiele 239-244

238. Durch eine Kugel mit dem Radius ϱ ist in der Entfernung d vom Mittelpunkt eine Achse gesteckt. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieser Kugel?

Auflösung:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m \varrho^2 + m d^2}{m g d}}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{d^2 + \frac{2}{5} \varrho^2}{g d}}$$

§ 62. Zentrifugalkraft.

Wird ein Körper gezwungen, eine gleichförmige Bewegung im Kreise auszuführen, so ist dieselbe die Wirkung einer Kraft, der sogenannten **Zentripetalkraft.**

Das Bewegliche M hat das Bestreben, sich im Momente der Betrachtung infolge seiner Trägheit mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $\overline{ME}$ fortzubewegen, Fig. 197, wird aber durch die Kraft C nach innen gezogen.

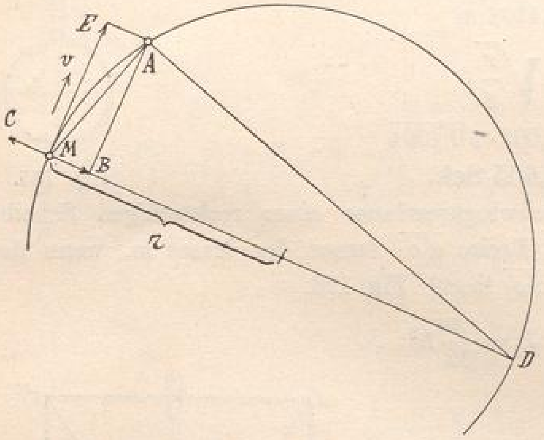

Fig. 197.

„Die Bewegung MA im Kreise kann also als Resultierende der Seitenbewegungen $\overline{ME}$ und $\overline{MB}$ aufgefaßt werden."

„Soll aber Gleichgewicht bestehen, so muß der nach innen gerichteten Kraft C eine entgegengesetzt gleichgroße C nach außen entgegenwirken. Letztere heißt **Flieh- oder Zentrifugalkraft.**"

„Die Zentripetalkraft bringt die Ablenkung des Beweglichen von der Geraden, die Zentrifugalkraft den Gleichgewichtszustand des Beweglichen hervor."

Noch deutlicher wird die Erklärung, wenn man das Bewegliche an das Ende eines Fadens von der Länge r anbringt und dasselbe um dessen anderes Ende rotieren läßt.

Das Bewegliche bewegt sich nun zwangsweise im Kreise, möchte sich stets tangential von demselben entfernen und bringt die Fadenspannung hervor. Die Zentripetalkraft ist also eine Aktion. Die Zentrifugalkraft, welche der letzteren das Gleichgewicht hält, ist eine Reaktion, denn sie verschwindet mit der Aktion. Wird der Faden irgendwo durchschnitten, so hören Aktion und Reaktion auf, denn M bewegt sich vermöge der Trägheit in der Tangente an dem Kreis weiter.

Die Beschleunigung, welche C dem Beweglichen erteilt, wird p, **Zentripetalbeschleunigung,** genannt.

In der unendlich kleinen Zeit τ wird der Weg von M nach innen

$$\overline{MB} = \frac{p}{2}\tau^2$$

Der Weg $\overline{ME}$ in der Zeit τ ist

$$\overline{ME} = v \cdot \tau$$

Statt des Bogens MA kann die Sehne $\overline{MA}$ gesetzt werden, und man erhält

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BA}^2$$

$$\overline{MA}^2 = \left(\frac{p}{2}\tau^2\right)^2 + (v \cdot \tau)^2$$

$\overline{MA}$ ist die Seite des rechtwinkligen Dreieckes MAD, so daß folgt

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MD}, \text{ somit}$$

$$\left(\frac{p}{2}\tau^2\right)^2 + (v \cdot \tau)^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$$

$$\frac{p^2}{4}\tau^4 + v^2 \cdot \tau^2 = \frac{p}{2}\tau^2 \cdot 2r$$

Da τ unendlich klein ist, kann das Glied $\frac{p^2}{4} \cdot \tau^4$ vernachlässigt werden und ergibt sich

$$v^2 \cdot \tau^2 = p \cdot \tau^2 \cdot r \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{v^2}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(238)}$$

„Die Größe der Zentrifugalbeschleunigung ist also das Verhältnis aus dem Quadrate der Geschwindigkeit im Kreise und dem Radius desselben.“

Die Zentripetal-, bzw. Zentrifugalkraft, selbst wird

$$\boldsymbol{C = \frac{mv^2}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(239 a)}$$

Da $v = r\omega$ ist, läßt sich auch schreiben

$$\boldsymbol{C = mr\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(239 b)}$$

„Die Größe der Fliehkraft ist direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit im Kreise und direkt proportional der Entfernung des Beweglichen vom Zentrum.“

Wird die Umlaufszeit T eingeführt, so ist wegen

$$v \cdot T = 2r\pi$$

$$v = \frac{2r\pi}{T} \text{ und}$$

$$C = \frac{m \cdot \frac{4r^2\pi^2}{T^2}}{r} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(239 c)}$$

Beispiele.

239. Welche Geschwindigkeit muß ein 6 kg schwerer Körper besitzen, damit er von einer ihn anziehenden Kraft $P = 30$ kg den Abstand $r = 2$ m behält?

Auflösung: $$P = M \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{30 \cdot 9{,}81 \cdot 2}{6}} = \sqrt{98{,}1}$$

$$\boldsymbol{v = 9{,}91} \textbf{ m}$$

240. Wie groß muß laut Fig. 198 der Achsabstand x sein, damit die Drehungsachse nicht beansprucht werde?

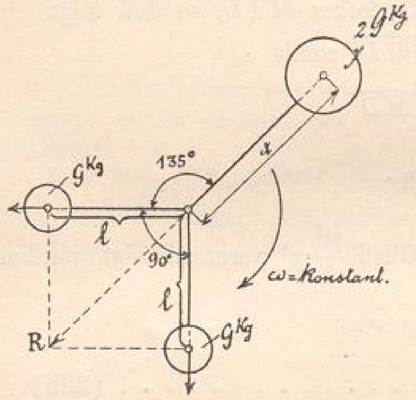

Fig. 198.

Auflösung: Die Resultierende der Zentrifugalkräfte der Kugeln im Achsabstande l muß gleich sein der Zentrifugalkraft im Achsabstande x.

$$\sqrt{\left(\frac{G}{g} l \omega^2\right)^2 + \left(\frac{G}{g} l \omega^2\right)^2} = \frac{2G}{g} \cdot x \cdot \omega^2$$

$$\frac{G}{g} l \omega^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2G}{g} x \omega^2$$

$$l\sqrt{2} = 2x$$

$$x = \frac{l}{2}\sqrt{2}$$

241. Wie groß muß die Neigung eines Reiters in einer kreisförmigen Reitbahn von 10 m Durchmesser bei einer Geschwindigkeit von $v = 4$ m sein?

Auflösung: Die Resultierende aus dem Gewichte des Reiters und aus der Fliehkraft muß in die Achsrichtung des Reiters fallen. Heißt der Winkel, den Reitergewicht und Resultierende bilden, α, dann ergibt sich

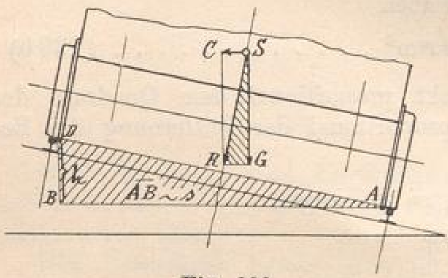

Fig. 199.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C}{G} = \frac{M \cdot \frac{v^2}{r}}{G} = \frac{M v^2}{r \cdot M g}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}326$$

$$\boldsymbol{\alpha \sim 18^0}$$

242. Um wieviel muß in der Krümmung mit dem Radius r die äußere Schiene eines Geleises über die innere erhöht werden, wenn an dieser Stelle höchstens mit der Geschwindigkeit v m/sek. gefahren werden darf und auf keinerlei Widerstände Rücksicht genommen wird? Fig. 199.

Auflösung: Das Gewicht des Wagens und die nach außen gerichtete Fliehkraft setzen sich zu einer Resultierenden R zusammen, welche senkrecht zur Tangentialebene an die Schienenköpfe liegen muß. Aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke ergibt sich, da statt der Spurweite $\overline{AD}$ annähernd deren Horizontalprojektion $\overline{AB}$ gesetzt werden kann,

$$h : s = C : G$$

$$h : s = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} : G$$

$$\boldsymbol{h = \frac{v^2 \cdot s}{g r}}$$

243. Um wievielmal müßte sich die Erde schneller drehen, damit ihre Anziehungskraft am Äquator durch die Fliehkraft aufgehoben werde? Erdradius $r = 6\,370\,000$ m, Umlaufszeit der Erde $23^h\ 56'\ 4'' = 86\,154''$.

Auflösung: Die gesuchte Geschwindigkeit heiße v_1. — Dann gilt

$$\frac{m v_1^2}{r} = G$$

$$v_1^2 = g r$$

$$v_1 = \sqrt{g r}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit am Äquator ist

$$v = \frac{2 r \pi}{86\,154}$$

Demnach wird $$\frac{v_1}{v} = \frac{g r}{\frac{2 r \pi}{86\,154}} = \frac{86\,154}{2 \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{6\,370\,000}} = \sqrt{0{,}000\,001\,54}$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{86\,154}{2 \pi} \cdot 0{,}001\,24$$

$$\boldsymbol{v_1 \sim 17\, v,}$$

d. h. die Erde müßte sich 17 mal schneller drehen.

244. Wie groß sind Umfangsgeschwindigkeit v und Umlaufszeit t des in Fig. 200 gezeichneten **Kegel- oder Zentrifugalpendels** mit der Länge l (l beschreibt einen Kegelmantel), wenn seine Elongation α ist? Wie groß ist ferner die Tourenzahl des Kegelpendels?

Auflösung: Das Gewicht G zerlegt sich in 2 Komponenten; die eine $\overline{SB}$ spannt den Faden, die andere $\overline{SA} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$ hält der Fliehkraft C das Gleichgewicht. Die Bedingung für letzteres lautet daher

$$G \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{g r \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \quad . \; . \; . \; \mathbf{(240)}$$

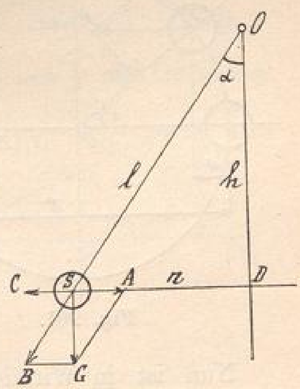

Fig. 200.