Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

D. Die Schichtenformel für concentrische Kreisbogen.

Der durch Drehung um die Y-Achse entstehende Körper kann mit Hülfe der Querschnittsformel

$$x^2\pi = \pi\,[\lg(1+z)]^2 = \pi\left[\frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\right]^2$$

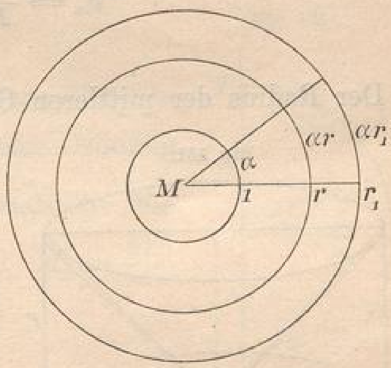
behandelt werden. Einfacher geschieht die Berechnung jedes seiner beiden Teile, indem man von dem durch Drehung des Rechtecks $ABCD$ entstehenden Cylinder den vorher berechneten Körper abzieht. Ebenso verfährt man mit dem statischen und dem Trägheits-Momente.

Damit kann die Untersuchung von $y = e^x$ und $x = {}^e\!\lg y$ abgeschlossen und als Beispiel für die Behandlung anderer transcendenter Kurven hingestellt werden.

D. Die Schichtenformel für Kreisbogen.

196) Die Tragweite der Schichtenformel läſst sich dadurch erweitern, daſs man sie auch auf concentrische Kreisbogen anwendet. Ein Beispiel wird dies klären.

Fig. 150.



K r e i s b o g e n   u n d   K r e i s f l ä c h e. Die Kreislinie von Radius r hat den Umfang $2r\pi$. Ihre sämtlichen Punkte haben vom Centrum die Entfernung r. Während also

$$q_r = 2r\pi$$

als Querschnitt aufzufassen ist, kann man

$$q_r = (2r\pi)\,r = 2r^2\pi$$

als P o l a r m o m e n t   e r s t e r   O r d n u n g,

$$q_r = (2r\pi)\,r^2 = 2r^3\pi$$

als P o l a r m o m e n t   z w e i t e r   O r d n u n g betrachten.

Demnach wird die Fläche des Kreises von 0 bis r

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = 2\pi\frac{r^2}{2} = r^2\pi,$$

das Polarmoment erster Ordnung der Kreisfläche

$$M_p = \frac{2\pi r^3}{3},$$

das Polarmoment zweiter Ordnung der Kreisfläche

$$T_p = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{2}.$$

Letzteres ist das polare Trägheitsmoment.

Das Polarmoment erster Ordnung findet Anwendung z. B. bei der Untersuchung der mittleren Drehungsgeschwindigkeit für den Fall, dafs die Fläche sich um eine Achse dreht, die senkrecht zu ihrer Ebene steht. Ist ϑ die auf den Radius r reduzierte Geschwindigkeit, so ist für jedes in der Entfernung r liegendes Flächenteilchen die sogenannte Bewegungsquantität

$$mv = mr\vartheta,$$

für den entsprechenden Kreisbogen also $(2r\pi)r\vartheta = 2r^2\pi\vartheta$, und für die Gesamtfläche

$$2\pi\vartheta\frac{r^3}{3} = M_p\vartheta.$$

Ist nun v_m die mittlere Geschwindigkeit der Fläche, so ist zu setzen

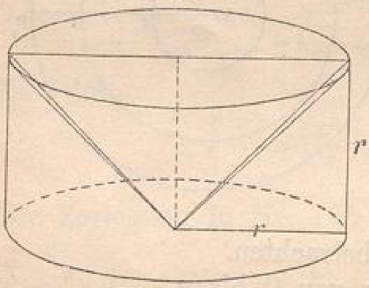
$$v_m F = M_p\vartheta = 2\pi\vartheta\frac{r^3}{3},$$

folglich ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F}\vartheta = \frac{\frac{2\pi\vartheta r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r\vartheta.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ist also

Fig. 151.



$$r_m = \frac{M_p}{F} = \frac{\frac{2\pi r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r.$$

Seine Bedeutung ist die, dafs die in ihm vereinigt gedachte Masse dieselbe Bewegungsquantität giebt. Man kann sich das Polarmoment veranschaulichen als den Aufsenkörper, der dadurch entsteht, dafs man aus dem über der Fläche stehenden Cylinder (bezw. Säule) einen Kegel von 45° Seitenneigung ausschneidet.

197) Für den Kreissektor erhält man in entsprechender Weise, wenn α der zum Radius 1 gehörige Bogen des Sektors ist, als Querschnitt $q_r = \alpha r$, als Fläche $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{\alpha r^2}{2}$, als Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{\alpha r^3}{3}$, als Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{\alpha r^4}{4}$.

Für den Sektor des concentrischen Kreisrings ergiebt sich als Fläche

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{\alpha}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right),$$

als Polarmoment erster Ordnung

$$M_p = \frac{\alpha}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right),$$

als Polarmoment zweiter Ordnung

$$T_p = \frac{\alpha}{4}\left(r_2^4 - r_1^4\right).$$

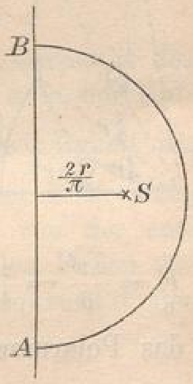
Der Radius mittlerer Geschwindigkeit wird

$$r_m = \frac{2}{3}\,\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2},$$

was noch durch $r_2 - r_1$ gekürzt werden könnte.

198) Dies eignet sich nicht nur für die Berechnung der Polarmomente, sondern auch für die Berechnung der axialen Momente, nur mufs man dann das Nötige für den Einzelbogen bereits berechnet haben.

Fig. 152.



Beispiel der Halbkreisfläche.

Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens liegt in der Entfernung $\frac{2r}{\pi}$, sein Axialmoment erster Ordnung ist also $r\pi \frac{2r}{\pi} = 2r^2$. Folglich ist das statische Moment der Halbkreisfläche in Bezug auf AB $M_y = \frac{2r^3}{3}$. Der Schwerpunktsabstand also ist

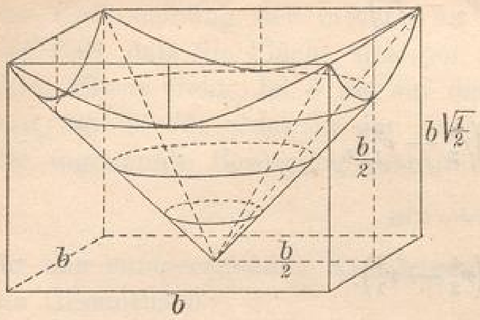
$$y_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Halbkreisbogens ist $r\pi r^2$, das axiale also $\frac{r\pi r^2}{2} = \frac{r^3\pi}{2}$. Daher ist für die ganze Fläche

$$T_y = \frac{\pi}{2}\frac{r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{8}.$$

199) Die Polarmomente erster Ordnung sind nicht so leicht und elegant zu behandeln wie die der zweiten Ordnung, da weder ein Verschiebungssatz von einfacher Form besteht, noch eine einfach zu behandelnde Beziehung zu den M_x und M_y. So bietet z. B. die Aufgabe, das Polarmoment erster Ordnung für ein Quadrat zu berechnen und daraus den Punkt mittlerer Geschwindigkeit zu bestimmen,

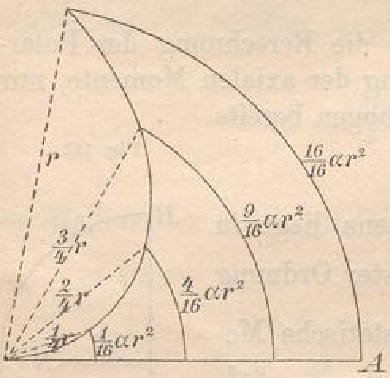
Fig. 153.



für die elementare Behandlung mancherlei Schwierigkeiten. Es würde sich um den Körper handeln, der stehen bleibt, wenn der Kegel von 45° Seitenneigung aus der quadratischen Säule ausgeschnitten wird, bei dem also hyperbolische Grenzlinien auftreten*).

200) Dagegen lassen sich leichte Betrachtungen über Spiralen anschliefsen. Zunächst gelten die für den Kreissektor abgeleiteten Formeln auch für den entsprechenden Raum zwischen zwei kongruenten Spiralen irgend welcher Art, die gegeneinander um den Winkel α gedreht sind.

Fig. 154.



Bei der Archimedischen Spirale sind die Bogen, vom Anfangsradius MA aus gerechnet, proportional dem Quadrate des Radius. Die Querschnittsformel wird also z. B.

$$q_r = ar^2.$$

Verhalten sich in der Figur die Bogen wie $1:4:9:16$, so entspricht dies Winkeln ϑ, 2ϑ, 3ϑ, 4ϑ. Die Berechnungen geschehen ganz nach Art der Parabel zweiter Ordnung. Die Fläche wird $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{a\,r^3}{3} = \frac{2}{3}$ Sektor. Das Polarmoment erster Ordnung wird $M_p = \frac{a\,r^4}{4}$, das Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{a\,r^5}{5}$. Der Radius mittlerer Drehungsgeschwindigkeit hat die Länge $r_m = \frac{3}{4}\,r$, der Trägheitsradius die Länge $\frac{3}{5}\,r$.

Für die Spirale nächsthöherer Ordnung ist $q_r = ar^3$, für sie ist

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{ar^4}{4} = \frac{1}{2} \text{ Sektor}, \quad M_p = \frac{ar^5}{5}, \quad T_p = \frac{ar^6}{6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = a\frac{1}{r}$ ist die Fläche

*) Analytisch kommt die Sache auf die Integration eines cyklometrischen Ausdrucks hinaus, die sich nur mit Hülfe langwieriger Reihenbetrachtungen elementar umgehen läfst. Später aber soll ein Abbildungsverfahren angegeben werden, durch welches sich die Aufgabe bequem erledigt.

von $r = 1$ aus zu rechnen und ergiebt sich als $\overset{r}{\underset{1}{F}} = a\,{}^e\!\lg r$. Dagegen ist, von 0 bis r gerechnet $M_p = a\frac{r}{1}$, $T_p = a\frac{r^2}{2}$.

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = a\frac{1}{r^2}$ ist die Fläche von 1 bis ∞ gerechnet $\overset{\infty}{F} = -\frac{ar^{-1}}{-1} = \frac{a}{r}$, das Polarmoment erster Ordnung von 1 bis r gerechnet, $M_p = a\,{}^e\!\lg r$, das Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{ar}{1}.$$

Die Analogie mit den Parabeln ist also eine vollkommene und soll hier nur deshalb nicht weiter erörtert werden, weil der Gegenstand für die Technik von geringerer Bedeutung ist.

Bei der logarithmischen Spirale $r = \varkappa e^{\vartheta}$ oder $\vartheta = {}^e\!\lg\frac{r}{\varkappa}$ handelt es sich um die Querschnittsformel $q_r = r\vartheta = r\,{}^e\!\lg\frac{r}{\varkappa}$. Dabei hat man sich für die elementare Behandlung der bekannten Reihenentwickelung zu bedienen und auf die Reihe die Schichtenformel anzuwenden.

Für die Kugel sei beiläufig bemerkt, daſs der Schwerpunkt des Meridiankeils, der nach 50) für sehr kleine Keilwinkel α in der Entfernung $\frac{3\pi}{16}r$ liegt, der Punkt mittlerer Drehungsgeschwindigkeit ist, denn bei unendlich kleinem α fällt der Punkt mittlerer Entfernung von der Achse mit dem Punkte mittlerer Entfernung von der entsprechenden Ebene zusammen, so daſs es sich in beiden Fällen um den Schwerpunkt des Keils handelt. Die Bewegungsquantität der Kugel ist also

$$\frac{3\pi}{16}r \cdot \frac{4}{3}r^3\pi\vartheta = \frac{r^4\pi^2}{4}\vartheta,$$

wenn ϑ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Der darin liegende Schluſs ist dadurch gerechtfertigt, daſs die Schwerpunkte der Teilkörper sämtlich auf einem Kreise liegen.

Für Drehungskörper also handelt es sich stets um den durch $\frac{T}{M}$ gegebenen Punkt, sobald die Hauptachse des Körpers mit der Drehungsachse zusammenfällt. Darin liegt eine neue Bedeutung für diese wichtige Formel. Sie giebt die Punkte mittlerer Entfernung von der Hauptachse für Drehungskörper an.

Um allgemeineres über Kreissegmente und Kreisabschnitte zu erhalten, löse man folgende

201) **Hülfsaufgabe.** Der Kreisbogen mit Winkel α hat in Bezug auf den senkrecht zur Symmetrieachse stehenden Durchmesser welches Trägheitsmoment?

Auflösung. Man projiziere jedes Bogenteilchen s auf die zum Durchmesser parallele Tangente EF, dann ist $xs = \frac{h}{n} \cdot r$, eine Bemerkung, die man von der Berechnung der Kugelkalotte bezw. Zone her kennt $\left(2x\pi s = 2r\pi \frac{h}{n}\right)\cdot$ Demnach ist bei Einteilung in gleiche $\frac{h}{n}$

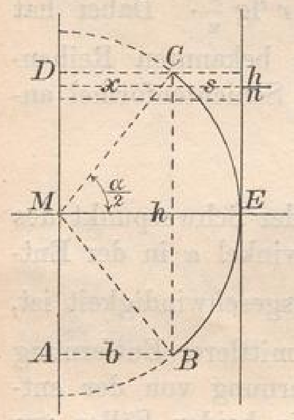
$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \cdots = \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \cdots,$$

und

$$\sum sx^2 = s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2 + \cdots = hr \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_4}{n}.$$

Der letzte Bruch bedeutet, da auch AD in gleiche Teile, deren Zahl unendlich grofs zu nehmen ist, eingeteilt wurde, die mittlere Höhe des Flächenstückes $ABECD$ über der Grundlinie AD. Diese ist also

Fig. 155.



$$x_m = \frac{\text{Sektor } MBEC + 2\Delta MCD}{\text{Grundlinie } h} = \frac{r^2\pi \frac{\alpha^0}{360^0} + \frac{1}{2} bh}{h}$$

oder

$$x_m = \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} r \cos\frac{\alpha}{2}\, 2r \sin\frac{\alpha}{2}}{h} = \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}$$

Demnach ist

$$\sum sx^2 = hrx_m = hr \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}$$

oder

$$T_y = \sum sx^2 = r^3 \left[\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} \sin\alpha\right]$$

das gesuchte Trägheitsmoment.

[Probe für $\alpha = 180^0$ giebt $\frac{r^3\pi}{2}$, was die Hälfte von $r^3\pi$ und der vierte Teil von $(2r\pi) r^2$ ist. Letzteres aber ist offenbar das polare Trägheitsmoment der Kreislinie für ihren Mittelpunkt.]

Nach der zur Probe gemachten Bemerkung ist für den Mittelpunkt M

$$T_p = 2r^3\pi \frac{\alpha^0}{360^0} = r^3\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$

das polare Trägheitsmoment des Bogens, demnach ist das andere axiale

$$T_x = T_p - T_y = 2r^3\pi\frac{\alpha}{360} - r^3\pi\frac{\alpha}{360} - r^3\frac{1}{2}\sin\alpha$$

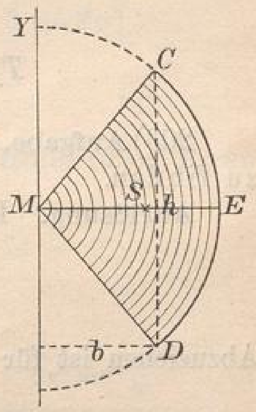
oder

$$T_x = r^3\left[\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right].$$

202) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment des Kreisausschnittes (Sektors) in Bezug auf den zur Symmetrieachse senkrecht stehenden Durchmesser zu finden.

Auflösung. Die vorige Formel gilt für jeden einzelnen der in Fig. 156 gezeichneten Bogen innerhalb des Sektors. Faſst man aber in

Fig. 156.



$$q_r = r^3\left(\pi\frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

r als veränderliche Gröſse auf, so geht nach der Schichtenformel, die auch hier angewandt werden darf, r^3 in $\frac{r^4}{4}$ über, so daſs man für die Sektorfläche hat

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\pi\frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{r^4}{8}\left[\pi\frac{\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

(Probe: Ist $\alpha = 180^0$, so folgt $T_y = \frac{r^4\pi}{8}$, was mit dem Früheren übereinstimmt. Ebenso ist für $\alpha = 90^0$

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{r^4}{16}(\pi + 2).$$

Ebenso für $\alpha = 45^0$

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \frac{r^4}{32}[\pi + 2\sqrt{2}\,].)$$

Für den Sektor ist ferner

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Symmetrieachse ME

$$T_x = T_p - T_y = \frac{r^4}{4}\left[\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Der Schwerpunktsabstand ist nach Nr. 10

$$e_s = \frac{2rh}{3b} = \frac{240r\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt giebt

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha}{360} - \frac{240^2 r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2}\cdot r^2\pi\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\pi}{360} - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$$

$$= r^4\left[\frac{\pi\alpha}{720} - \frac{160\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\right].$$

Ebenso ist dann

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

203) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Kreisabschnittes zu finden.

Auflösung. In Fig. 156 war für den Durchmesser

$$T_y' = \frac{r^2}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für das Dreieck MDC

$$T_y'' = \frac{hb^3}{4} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\, r^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{8}.$$

Demnach wird für das Segment BEC in Bezug auf den Durchmesser

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha - \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

1) $$T_y = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{90} - \sin 2\alpha\right].$$

Für ME war

$$T_x' = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für Dreieck MDC

$$T_x' = \frac{bh^3}{48} = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}\left(2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{48} = \frac{r^4\cdot 4\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{48}$$

oder

$$T_x' = \frac{r^4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{24}.$$

Demnach wird für das Segment in Bezug auf ME

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha(1-\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{24}\left[\frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

$$T_x = \frac{r^4}{24}\left[\frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right] = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha\right].$$

Addiert man dazu

$$T_y = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha\right],$$

so erhält man in Bezug auf M

$$T_p = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha + \frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha\right]$$

$$= \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{15} - 8\sin\alpha + 4\sin 2\alpha\right].$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt geschieht mit Hülfe von $e_s^2 F$, wo

$$e_s = \frac{h^3}{12F} = \frac{h^3}{6r^2\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)}.$$

Es ist also für T_y und T_p abzuziehen

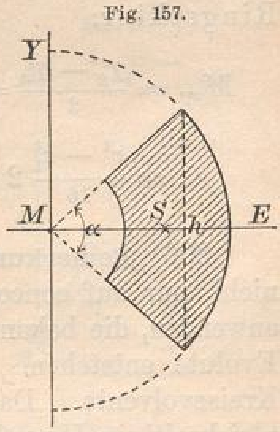
$$\frac{h^6}{144F^2}F = \frac{h^6}{144F} = \frac{2^6 \cdot r^6 \sin^6\frac{\alpha}{2}}{2^4 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} r^2\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]} = \frac{8r^6\sin^6\frac{\alpha}{2}}{9r^2\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]}$$

$$= \frac{160r^4\sin^6\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha - 180\sin\alpha}.$$

(Probe für den Halbkreis stimmt.)

Bemerkung. Diese Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Centrifugentheorie, denn bei etwa kugelförmiger Gestalt kann der Querschnitt der schnell rotierenden Flüssigkeit als Kreissegment betrachtet werden. Formel 1) ist in die Formel $K = \frac{2k'}{g}T\vartheta^2$ in Nr. 49 einzusetzen.

Fig. 157.



204) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Ringsektors zu berechnen.

Nach 44 handelt es sich in Bezug auf den Durchmesser um

$$T_y = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right],$$

in Bezug auf ME um

$$T_x = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right],$$

und in Bezug auf M um

$$T_p = \frac{r^4 - r_1^4}{720} \pi \alpha.$$

Da nach 11

$$MS = e_s = \frac{2h}{3\widehat{b}} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2 \cdot 2r \sin\frac{\alpha}{2}}{3 \cdot 2r\pi \frac{\alpha}{360}} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{240 \sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha} \frac{r^3 - r_1^3}{r_2 - r_1^2}$$

ist, so mufs für T_p und T_y

$$e_s^2 F = \frac{240^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2} \frac{\left(r^3 - r_1^3\right)^2}{\left(r^2 - r_1^2\right)^2} \frac{\left(r^2 - r_1^2\right)\pi\alpha}{360} = \frac{160 \sin^2\frac{\alpha}{2} \left(r^3 - r_1^3\right)^2}{\pi\alpha\left(r^2 - r_1^2\right)}$$

abgezogen werden, wenn man die Reduktion auf den Schwerpunkt durchführen will.

205) **Aufgabe.** Die maximalen Centrifugalmomente in Bezug auf M für die letzten Querschnitte zu berechnen.

Auflösung. Sektor:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - 3 \sin\alpha\right] - \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{2r^4 \sin\alpha}{16} = \frac{r^4 \sin\alpha}{8}.$$

Segment:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{96}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 3 \sin 2\alpha\right] - \frac{r^4}{96}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8 \sin\alpha + \sin 2\alpha\right]$$

$$= \frac{r^4}{96}[8 \sin\alpha - 4 \sin 2\alpha] = \frac{r^4}{24}[2 \sin\alpha - \sin 2\alpha].$$

Ringsektor:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4 - r_1^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{r^4 - r_1^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{160} - \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{r^4 - r_1^4}{16} 2 \sin\alpha = \frac{r^4 - r_1^4}{8} \sin\alpha.$$

206) **Bemerkung.** Die hier durchgeführte Methode läfst sich nicht nur auf concentrische Kreise, sondern auch auf Parallelkurven anwenden, die bekanntlich durch Abwickelung einer gemeinschaftlichen Evolute entstehen. Hierher gehört z. B. die Inhaltsberechnung der Kreisevolvente. Dagegen ist die Anwendung auf die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln, auf die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, auf konfokale Lemniskatenscharen und Hyperbelbüschel u. s. w. ausgeschlossen, weil hier die Breite der Elementarstreifen veränderlich

ist, so dafs die Anwendung der Rechtecksformel $\frac{h}{n} \cdot l$, wo $\frac{h}{n}$ die Breite, l die Länge des Streifens ist, unzulässig erscheint. Dort müssen also andere Methoden eintreten. Auf die Evolventen soll erst im nächsten Bande eingegangen werden.

E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

207) Nach dem Methodischen Lehrbuche Teil II, Anhang, ist, wenn die Querschnittsformel einer Kurve die Gestalt

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots$$

hat, die Neigung der Tangente gegen die Y-Achse an der Stelle y zu berechnen aus

$$\tan \alpha = b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots.$$

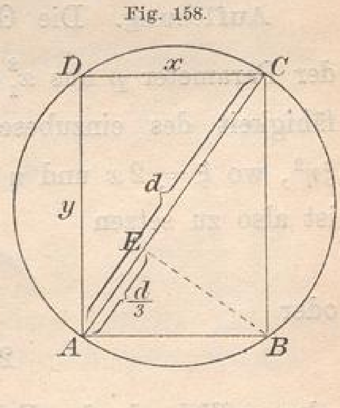
Ein Maximum oder Minimum kann im allgemeinen nur dann stattfinden, wenn dieser Wert gleich Null ist. Die fraglichen Stellen berechnen sich also aus

$$b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots = 0.$$

Die wirkliche Auswertung kann elementar höchstens bis zum 4ten Grade gehen. Trotzdem lassen sich einige wichtige Aufgaben mit Hülfe solcher Betrachtungen erledigen, wie die nachstehenden Beispiele zeigen.

Die Untersuchung, ob an entsprechender Stelle ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, oder ob die Kurve dort einen Rückkehrpunkt (eine Spitze), oder einen Wendepunkt oder sonstige Unregelmäfsigkeiten hat, läfst sich nur mit Hülfe der höheren Differentialquotienten hinlänglich scharf entscheiden. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Fig. 158.



208) **Aufgabe.** Aus einem kreisrunden Balken den rechteckigen Balken von gröfster Tragfähigkeit auszuschneiden.

Auflösung. Die Tragfähigkeit ist, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional dem Ausdrucke $\frac{xy^2}{6}$, oder auch $xy^2 = x(d^2 - x^2) = d^2x - x^3$. Stellt man $z = d^2x - x^3$ graphisch dar, so ergiebt sich als trigonometrische Tangente der geometrischen Tangente $\tan \alpha = d^2 - 3x^2$. Eine Maximalstelle ist nur möglich, wenn $d^2 - 3x^2 = 0$ ist, d. h. $x^2 = \frac{d^2}{3}$ oder $x = d\sqrt{\frac{1}{3}}$. Man kann x