Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Polarmomente 1. und 2. Ordnung.

Der durch Drehung um die Y-Achse entstehende Körper kann mit Hülfe der Querschnittsformel

$$x^2\pi = \pi\,[\lg(1+z)]^2 = \pi\left[\frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\right]^2$$

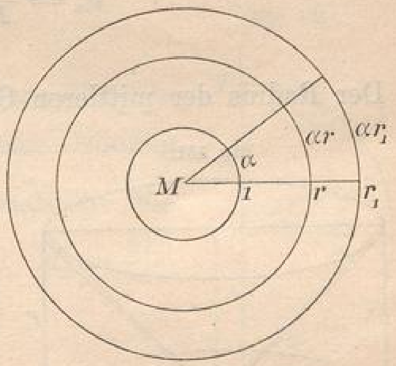
behandelt werden. Einfacher geschieht die Berechnung jedes seiner beiden Teile, indem man von dem durch Drehung des Rechtecks $ABCD$ entstehenden Cylinder den vorher berechneten Körper abzieht. Ebenso verfährt man mit dem statischen und dem Trägheits-Momente.

Damit kann die Untersuchung von $y = e^x$ und $x = {}^e\lg y$ abgeschlossen und als Beispiel für die Behandlung anderer transcendenter Kurven hingestellt werden.

D. Die Schichtenformel für Kreisbogen.

196) Die Tragweite der Schichtenformel läſst sich dadurch erweitern, daſs man sie auch auf concentrische Kreisbogen anwendet. Ein Beispiel wird dies klären.

Fig. 150.



Kreisbogen und Kreisfläche. Die Kreislinie von Radius r hat den Umfang $2r\pi$. Ihre sämtlichen Punkte haben vom Centrum die Entfernung r. Während also

$$q_r = 2r\pi$$

als Querschnitt aufzufassen ist, kann man

$$q_r = (2r\pi)\,r = 2r^2\pi$$

als Polarmoment erster Ordnung,

$$q_r = (2r\pi)\,r^2 = 2r^3\pi$$

als Polarmoment zweiter Ordnung betrachten.

Demnach wird die Fläche des Kreises von 0 bis r

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = 2\pi\frac{r^2}{2} = r^2\pi,$$

das Polarmoment erster Ordnung der Kreisfläche

$$M_p = \frac{2\pi r^3}{3},$$

das Polarmoment zweiter Ordnung der Kreisfläche

$$T_p = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{2}.$$

Letzteres ist das polare Trägheitsmoment.

Das Polarmoment erster Ordnung findet Anwendung z. B. bei der Untersuchung der mittleren Drehungsgeschwindigkeit für den Fall, daſs die Fläche sich um eine Achse dreht, die senkrecht zu ihrer Ebene steht. Ist ϑ die auf den Radius r reduzierte Geschwindigkeit, so ist für jedes in der Entfernung r liegendes Flächenteilchen die sogenannte Bewegungsquantität

$$mv = mr\vartheta,$$

für den entsprechenden Kreisbogen also $(2r\pi)r\vartheta = 2r^2\pi\vartheta$, und für die Gesamtfläche

$$2\pi\vartheta\frac{r^3}{3} = M_p\vartheta.$$

Ist nun v_m die mittlere Geschwindigkeit der Fläche, so ist zu setzen

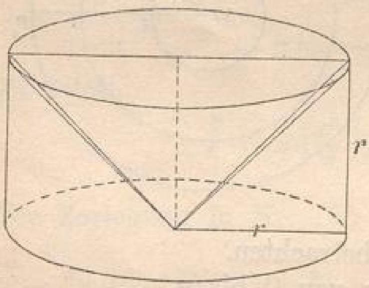
$$v_m F = M_p\vartheta = 2\pi\vartheta\frac{r^3}{3},$$

folglich ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F}\vartheta = \frac{\frac{2\pi\vartheta r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r\vartheta.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ist also

Fig. 151.



$$r_m = \frac{M_p}{F} = \frac{\frac{2\pi r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r.$$

Seine Bedeutung ist die, daſs die in ihm vereinigt gedachte Masse dieselbe Bewegungsquantität giebt. Man kann sich das Polarmoment veranschaulichen als den Auſsenkörper, der dadurch entsteht, daſs man aus dem über der Fläche stehenden Cylinder (bezw. Säule) einen Kegel von 45° Seitenneigung ausschneidet.

197) Für den Kreissektor erhält man in entsprechender Weise, wenn α der zum Radius 1 gehörige Bogen des Sektors ist, als Querschnitt $q_r = \alpha r$, als Fläche $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{\alpha r^2}{2}$, als Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{\alpha r^3}{3}$, als Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{\alpha r^4}{4}$.

Für den Sektor des concentrischen Kreisrings ergiebt sich als Fläche