Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Beispiel des Kreises, des Sektors und der Halbkreisfläche.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Das Polarmoment erster Ordnung findet Anwendung z. B. bei der Untersuchung der mittleren Drehungsgeschwindigkeit für den Fall, dafs die Fläche sich um eine Achse dreht, die senkrecht zu ihrer Ebene steht. Ist ϑ die auf den Radius r reduzierte Geschwindigkeit, so ist für jedes in der Entfernung r liegendes Flächenteilchen die sogenannte Bewegungsquantität

$$mv = mr\vartheta,$$

für den entsprechenden Kreisbogen also $(2r\pi)r\vartheta = 2r^2\pi\vartheta$, und für die Gesamtfläche

$$2\pi\vartheta\frac{r^3}{3} = M_p\vartheta.$$

Ist nun v_m die mittlere Geschwindigkeit der Fläche, so ist zu setzen

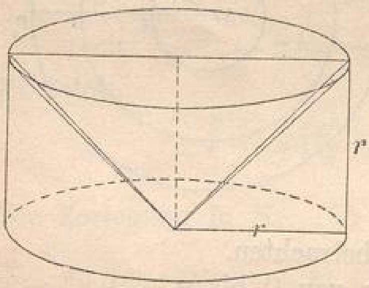
$$v_m F = M_p\vartheta = 2\pi\vartheta\frac{r^3}{3},$$

folglich ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F}\vartheta = \frac{\frac{2\pi\vartheta r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r\vartheta.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ist also

Fig. 151.



$$r_m = \frac{M_p}{F} = \frac{\frac{2\pi r^3}{3}}{2\pi\frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}r.$$

Seine Bedeutung ist die, dafs die in ihm vereinigt gedachte Masse dieselbe Bewegungsquantität giebt. Man kann sich das Polarmoment veranschaulichen als den Aufsenkörper, der dadurch entsteht, dafs man aus dem über der Fläche stehenden Cylinder (bezw. Säule) einen Kegel von 45° Seitenneigung ausschneidet.

197) Für den Kreissektor erhält man in entsprechender Weise, wenn α der zum Radius 1 gehörige Bogen des Sektors ist, als Querschnitt $q_r = \alpha r$, als Fläche $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{\alpha r^2}{2}$, als Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{\alpha r^3}{3}$, als Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{\alpha r^4}{4}$.

Für den Sektor des concentrischen Kreisrings ergiebt sich als Fläche

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = \frac{\alpha}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right),$$

als Polarmoment erster Ordnung

$$M_p = \frac{\alpha}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right),$$

als Polarmoment zweiter Ordnung

$$T_p = \frac{\alpha}{4}\left(r_2^4 - r_1^4\right).$$

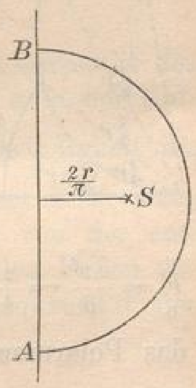
Der Radius mittlerer Geschwindigkeit wird

$$r_m = \frac{2}{3}\,\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2},$$

was noch durch $r_2 - r_1$ gekürzt werden könnte.

198) Dies eignet sich nicht nur für die Berechnung der Polarmomente, sondern auch für die Berechnung der axialen Momente, nur mufs man dann das Nötige für den Einzelbogen bereits berechnet haben.

Fig. 152.



Beispiel der Halbkreisfläche.

Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens liegt in der Entfernung $\frac{2r}{\pi}$, sein Axialmoment erster Ordnung ist also $r\pi\frac{2r}{\pi} = 2r^2$. Folglich ist das statische Moment der Halbkreisfläche in Bezug auf AB $M_y = \frac{2r^3}{3}$. Der Schwerpunktsabstand also ist

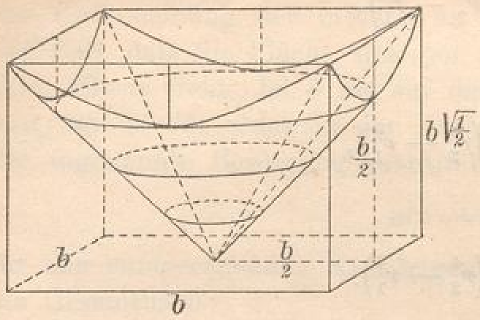
$$y_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Halbkreisbogens ist $r\pi r^2$, das axiale also $\frac{r\pi r^2}{2} = \frac{r^3\pi}{2}$. Daher ist für die ganze Fläche

$$T_y = \frac{\pi r^4}{2\,4} = \frac{r^4\pi}{8}.$$

199) Die Polarmomente erster Ordnung sind nicht so leicht und elegant zu behandeln wie die der zweiten Ordnung, da weder ein Verschiebungssatz von einfacher Form besteht, noch eine einfach zu behandelnde Beziehung zu den M_x und M_y. So bietet z. B. die Aufgabe, das Polarmoment erster Ordnung für ein Quadrat zu berechnen und daraus den Punkt mittlerer Geschwindigkeit zu bestimmen,

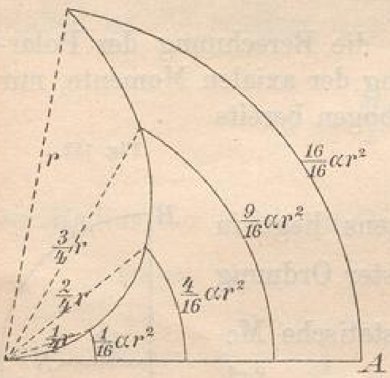
Fig. 153.



für die elementare Behandlung mancherlei Schwierigkeiten. Es würde sich um den Körper handeln, der stehen bleibt, wenn der Kegel von 45° Seitenneigung aus der quadratischen Säule ausgeschnitten wird, bei dem also hyperbolische Grenzlinien auftreten*).

200) Dagegen lassen sich leichte Betrachtungen über Spiralen anschliefsen. Zunächst gelten die für den Kreissektor abgeleiteten Formeln auch für den entsprechenden Raum zwischen zwei kongruenten Spiralen irgend welcher Art, die gegeneinander um den Winkel α gedreht sind.

Fig. 154.



Bei der Archimedischen Spirale sind die Bogen, vom Anfangsradius MA aus gerechnet, proportional dem Quadrate des Radius. Die Querschnittsformel wird also z. B.

$$q_r = ar^2.$$

Verhalten sich in der Figur die Bogen wie $1:4:9:16$, so entspricht dies Winkeln ϑ, 2ϑ, 3ϑ, 4ϑ. Die Berechnungen geschehen ganz nach Art der Parabel zweiter Ordnung. Die Fläche wird $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{ar^3}{3} = \frac{2}{3}$ Sektor. Das Polarmoment erster Ordnung wird $M_p = \frac{ar^4}{4}$, das Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{ar^5}{5}$. Der Radius mittlerer Drehungsgeschwindigkeit hat die Länge $r_m = \frac{3}{4}r$, der Trägheitsradius die Länge $\frac{3}{5}r$.

Für die Spirale nächsthöherer Ordnung ist $q_r = ar^3$, für sie ist

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{ar^4}{4} = \frac{1}{2} \text{ Sektor}, \quad M_p = \frac{ar^5}{5}, \quad T_p = \frac{ar^6}{6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = a\frac{1}{r}$ ist die Fläche

*) Analytisch kommt die Sache auf die Integration eines cyklometrischen Ausdrucks hinaus, die sich nur mit Hülfe langwieriger Reihenbetrachtungen elementar umgehen läfst. Später aber soll ein Abbildungsverfahren angegeben werden, durch welches sich die Aufgabe bequem erledigt.