Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

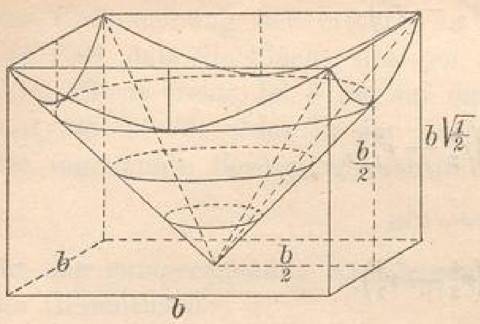
Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Archimedische und andere Spiralen.

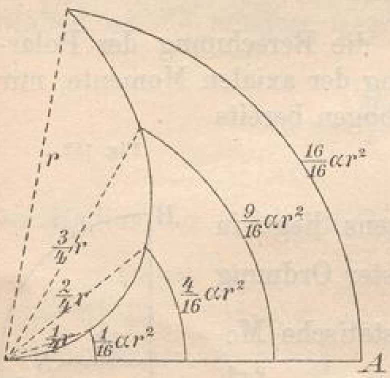
Fig. 153.



für die elementare Behandlung mancherlei Schwierigkeiten. Es würde sich um den Körper handeln, der stehen bleibt, wenn der Kegel von 45^0 Seitenneigung aus der quadratischen Säule ausgeschnitten wird, bei dem also hyperbolische Grenzlinien auftreten*).

200) Dagegen lassen sich leichte Betrachtungen über Spiralen anschliefsen. Zunächst gelten die für den Kreissektor abgeleiteten Formeln auch für den entsprechenden Raum zwischen zwei kongruenten Spiralen irgend welcher Art, die gegeneinander um den Winkel α gedreht sind.

Fig. 154.



Bei der Archimedischen Spirale sind die Bogen, vom Anfangsradius MA aus gerechnet, proportional dem Quadrate des Radius. Die Querschnittsformel wird also z. B.

$$q_r = \alpha r^2.$$

Verhalten sich in der Figur die Bogen wie $1:4:9:16$, so entspricht dies Winkeln ϑ, 2ϑ, 3ϑ, 4ϑ. Die Berechnungen geschehen ganz nach Art der Parabel zweiter Ordnung. Die Fläche wird $\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{\alpha r^3}{3} = \frac{2}{3}$ Sektor. Das Polarmoment erster Ordnung wird $M_p = \frac{\alpha r^4}{4}$, das Polarmoment zweiter Ordnung $T_p = \frac{\alpha r^5}{5}$. Der Radius mittlerer Drehungsgeschwindigkeit hat die Länge $r_m = \frac{3}{4}r$, der Trägheitsradius die Länge $\frac{3}{5}r$.

Für die Spirale nächsthöherer Ordnung ist $q_r = \alpha r^3$, für sie ist

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = \frac{\alpha r^4}{4} = \frac{1}{2} \text{ Sektor}, \quad M_p = \frac{\alpha r^5}{5}, \quad T_p = \frac{\alpha r^6}{6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = \alpha \frac{1}{r}$ ist die Fläche

*) Analytisch kommt die Sache auf die Integration eines cyklometrischen Ausdrucks hinaus, die sich nur mit Hülfe langwieriger Reihenbetrachtungen elementar umgehen läfst. Später aber soll ein Abbildungsverfahren angegeben werden, durch welches sich die Aufgabe bequem erledigt.

von $r = 1$ aus zu rechnen und ergiebt sich als $\overset{r}{\underset{1}{F}} = a\,{}^e\!\lg r$. Dagegen ist, von 0 bis r gerechnet $M_p = a\frac{r}{1}$, $T_p = a\frac{r^2}{2}$.

Für die Spirale mit Querschnittsformel $q_r = a\frac{1}{r^2}$ ist die Fläche von 1 bis ∞ gerechnet $\overset{\infty}{F} = -\frac{ar^{-1}}{-1} = \frac{a}{r}$, das Polarmoment erster Ordnung von 1 bis r gerechnet, $M_p = a\,{}^e\!\lg r$, das Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{ar}{1}.$$

Die Analogie mit den Parabeln ist also eine vollkommene und soll hier nur deshalb nicht weiter erörtert werden, weil der Gegenstand für die Technik von geringerer Bedeutung ist.

Bei der logarithmischen Spirale $r = \varkappa e^{\vartheta}$ oder $\vartheta = {}^e\!\lg\frac{r}{\varkappa}$ handelt es sich um die Querschnittsformel $q_r = r\vartheta = r\,{}^e\!\lg\frac{r}{\varkappa}$. Dabei hat man sich für die elementare Behandlung der bekannten Reihenentwickelung zu bedienen und auf die Reihe die Schichtenformel anzuwenden.

Für die Kugel sei beiläufig bemerkt, daſs der Schwerpunkt des Meridiankeils, der nach 50) für sehr kleine Keilwinkel α in der Entfernung $\frac{3\pi}{16}r$ liegt, der Punkt mittlerer Drehungsgeschwindigkeit ist, denn bei unendlich kleinem α fällt der Punkt mittlerer Entfernung von der Achse mit dem Punkte mittlerer Entfernung von der entsprechenden Ebene zusammen, so daſs es sich in beiden Fällen um den Schwerpunkt des Keils handelt. Die Bewegungsquantität der Kugel ist also

$$\frac{3\pi}{16}r \cdot \frac{4}{3}r^3\pi\vartheta = \frac{r^4\pi^2}{4}\vartheta,$$

wenn ϑ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Der darin liegende Schluſs ist dadurch gerechtfertigt, daſs die Schwerpunkte der Teilkörper sämtlich auf einem Kreise liegen.

Für Drehungskörper also handelt es sich stets um den durch $\frac{T}{M}$ gegebenen Punkt, sobald die Hauptachse des Körpers mit der Drehungsachse zusammenfällt. Darin liegt eine neue Bedeutung für diese wichtige Formel. Sie giebt die Punkte mittlerer Entfernung von der Hauptachse für Drehungskörper an.

Um allgemeineres über Kreissegmente und Kreisabschnitte zu erhalten, löse man folgende

201) **Hülfsaufgabe.** Der Kreisbogen mit Winkel α hat in Bezug auf den senkrecht zur Symmetrieachse stehenden Durchmesser welches Trägheitsmoment?

Auflösung. Man projiziere jedes Bogenteilchen s auf die zum Durchmesser parallele Tangente EF, dann ist $xs = \frac{h}{n} \cdot r$, eine Bemerkung, die man von der Berechnung der Kugelkalotte bezw. Zone her kennt $\left(2x\pi s = 2r\pi \frac{h}{n}\right)$. Demnach ist bei Einteilung in gleiche $\frac{h}{n}$

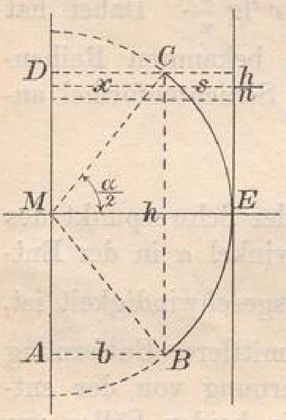
$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + \cdots = \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \cdots,$$

und

$$\sum sx^2 = s_1x_1^2 + s_2x_2^2 + s_3x_3^2 + \cdots = hr \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_4}{n}.$$

Der letzte Bruch bedeutet, da auch AD in gleiche Teile, deren Zahl unendlich grofs zu nehmen ist, eingeteilt wurde, die mittlere Höhe des Flächenstückes $ABECD$ über der Grundlinie AD. Diese ist also

Fig. 155.



$$x_m = \frac{\text{Sektor } MBEC + 2\triangle MCD}{\text{Grundlinie } h}$$

$$= \frac{r^2\pi \frac{\alpha^0}{360^0} + \frac{1}{2} bh}{h}$$

oder

$$x_m = \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} r \cos\frac{\alpha}{2} \, 2r \sin\frac{\alpha}{2}}{h}$$

$$= \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}$$

Demnach ist

$$\sum sx^2 = hrx_m = hr \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}$$

oder

$$T_y = \sum sx^2 = r^3 \left[\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} \sin\alpha\right]$$

das gesuchte Trägheitsmoment.

[Probe für $\alpha = 180^0$ giebt $\frac{r^3\pi}{2}$, was die Hälfte von $r^3\pi$ und der vierte Teil von $(2r\pi)\,r^2$ ist. Letzteres aber ist offenbar das polare Trägheitsmoment der Kreislinie für ihren Mittelpunkt.]

Nach der zur Probe gemachten Bemerkung ist für den Mittelpunkt M

$$T_p = 2r^3\pi \frac{\alpha^0}{360^0} = r^3\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$