Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Kreisbogen und Kreissektor.

201) **Hülfsaufgabe.** Der Kreisbogen mit Winkel α hat in Bezug auf den senkrecht zur Symmetrieachse stehenden Durchmesser welches Trägheitsmoment?

Auflösung. Man projiziere jedes Bogenteilchen s auf die zum Durchmesser parallele Tangente EF, dann ist $xs = \frac{h}{n} \cdot r$, eine Bemerkung, die man von der Berechnung der Kugelkalotte bezw. Zone her kennt $\left(2x\pi s = 2r\pi \frac{h}{n}\right)$. Demnach ist bei Einteilung in gleiche $\frac{h}{n}$

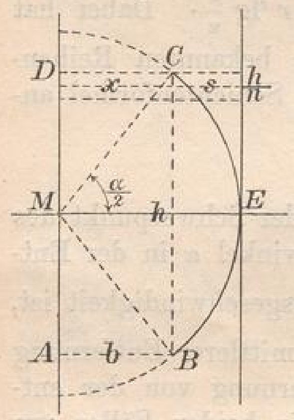
$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \cdots = \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \frac{h}{n} r + \cdots,$$

und

$$\sum s x^2 = s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2 + \cdots = hr \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_4}{n}.$$

Der letzte Bruch bedeutet, da auch AD in gleiche Teile, deren Zahl unendlich grofs zu nehmen ist, eingeteilt wurde, die mittlere Höhe des Flächenstückes $ABECD$ über der Grundlinie AD. Diese ist also

Fig. 155.



$$x_m = \frac{\text{Sektor } MBEC + 2\Delta MCD}{\text{Grundlinie } h}$$

$$= \frac{r^2\pi \frac{\alpha^0}{360^0} + \frac{1}{2} bh}{h}$$

oder

$$x_m = \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2} r \cos\frac{\alpha}{2} 2r \sin\frac{\alpha}{2}}{h}$$

$$= \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2} \sin\alpha}{h}$$

Demnach ist

$$\sum s x^2 = hr x_m = hr \frac{r^2\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{r^2}{2}\sin\alpha}{h}$$

oder

$$T_y = \sum s x^2 = r^3 \left[\pi \frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right]$$

das gesuchte Trägheitsmoment.

[Probe für $\alpha = 180^0$ giebt $\frac{r^3\pi}{2}$, was die Hälfte von $r^3\pi$ und der vierte Teil von $(2r\pi) r^2$ ist. Letzteres aber ist offenbar das polare Trägheitsmoment der Kreislinie für ihren Mittelpunkt.]

Nach der zur Probe gemachten Bemerkung ist für den Mittelpunkt M

$$T_p = 2r^3\pi \frac{\alpha^0}{360^0} = r^3\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$

das polare Trägheitsmoment des Bogens, demnach ist das andere axiale

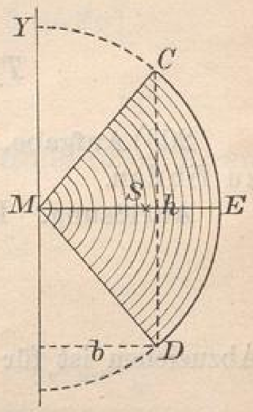
$$T_x = T_p - T_y = 2r^3\pi\frac{\alpha}{360} - r^3\pi\frac{\alpha}{360} - r^3\,\frac{1}{2}\sin\alpha$$

oder

$$T_x = r^3\left[\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right].$$

202) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment des Kreisausschnittes (Sektors) in Bezug auf den zur Symmetrieachse senkrecht stehenden Durchmesser zu finden.

Fig. 156.



Auflösung. Die vorige Formel gilt für jeden einzelnen der in Fig. 156 gezeichneten Bogen innerhalb des Sektors. Faſst man aber in

$$q_r = r^3\left(\pi\frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

r als veränderliche Gröſse auf, so geht nach der Schichtenformel, die auch hier angewandt werden darf, r^3 in $\frac{r^4}{4}$ über, so daſs man für die Sektorfläche hat

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\pi\frac{\alpha}{360} + \frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{r^4}{8}\left[\pi\frac{\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

(Probe: Ist $\alpha = 180^0$, so folgt $T_y = \frac{r^4\pi}{8}$, was mit dem Früheren übereinstimmt. Ebenso ist für $\alpha = 90^0$

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{r^4}{16}(\pi + 2).$$

Ebenso für $\alpha = 45^0$

$$T_y = \frac{r^4}{4}\left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\,\right] = \frac{r^4}{32}\left[\pi + 2\sqrt{2}\,\right].)$$

Für den Sektor ist ferner

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\,\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Symmetrieachse ME

$$T_x = T_p - T_y = \frac{r^4}{4}\left[\pi\frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Der Schwerpunktsabstand ist nach Nr. 10

$$e_s = \frac{2rh}{3b} = \frac{240\,r\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt giebt

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\,\frac{\alpha}{360} - \frac{240^2 r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2}\cdot r^2\pi\,\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi}{2}\,\frac{\pi}{360} - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$$

$$= r^4\left[\frac{\pi\alpha}{720} - \frac{160\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\right].$$

Ebenso ist dann

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{160 r^4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

203) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Kreisabschnittes zu finden.

Auflösung. In Fig. 156 war für den Durchmesser

$$T_y' = \frac{r^2}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für das Dreieck MDC

$$T_y'' = \frac{hb^3}{4} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\, r^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{8}.$$

Demnach wird für das Segment BEC in Bezug auf den Durchmesser

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha - \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

1) $$T_y = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{90} - \sin 2\alpha\right].$$

Für ME war

$$T_x' = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für Dreieck MDC

$$T_x' = \frac{bh^3}{48} = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}\left(2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{48} = \frac{r^4\cdot 4\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{48}$$

oder

$$T_x' = \frac{r^4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{24}.$$

Demnach wird für das Segment in Bezug auf ME