Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Kreisabschnitt, Ringsektor.

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha}{360} - \frac{240^2 r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2}\cdot r^2\pi\frac{\alpha}{360} = \frac{r^4\pi}{2}\frac{\pi}{360} - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$$

$$= r^4\left[\frac{\pi\alpha}{720} - \frac{160\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\right].$$

Ebenso ist dann

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{160 r^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}.$$

203) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Kreisabschnittes zu finden.

Auflösung. In Fig. 156 war für den Durchmesser

$$T_y' = \frac{r^2}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für das Dreieck MDC

$$T_y'' = \frac{hb^3}{4} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\, r^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{8}.$$

Demnach wird für das Segment BEC in Bezug auf den Durchmesser

$$T_y = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha - \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

1) $$T_y = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{90} - \sin 2\alpha\right].$$

Für ME war

$$T_x' = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right].$$

Abzuziehen ist für Dreieck MDC

$$T_x' = \frac{bh^3}{48} = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}\left(2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{48} = \frac{r^4\cdot 4\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{48}$$

oder

$$T_x' = \frac{r^4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12} = \frac{r^4\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{24}.$$

Demnach wird für das Segment in Bezug auf ME

$$T_x = \frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha(1-\cos\alpha)\right] = \frac{r^4}{24}\left[\frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

oder

$$T_x = \frac{r^4}{24}\left[\frac{\pi\alpha}{60} - 4\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right] = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha\right].$$

Addiert man dazu

$$T_y = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha\right],$$

so erhält man in Bezug auf M

$$T_p = \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha + \frac{\pi\alpha}{30} + 3\sin 2\alpha\right]$$

$$= \frac{r^4}{48}\left[\frac{\pi\alpha}{15} - 8\sin\alpha + 4\sin 2\alpha\right].$$

Die Reduktion auf den Schwerpunkt geschieht mit Hülfe von $e_s^2 F$, wo

$$e_s = \frac{h^3}{12F} = \frac{h^3}{6r^2\left(\pi\frac{\alpha}{180} - \sin\alpha\right)}.$$

Es ist also für T_y und T_p abzuziehen

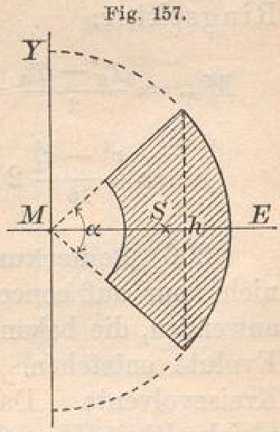
$$\frac{h^6}{144F^2}F = \frac{h^6}{144F} = \frac{2^6 \cdot r^6 \sin^6\frac{\alpha}{2}}{2^4\cdot 3^2\cdot\frac{1}{2}r^2\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]} = \frac{8r^6\sin^6\frac{\alpha}{2}}{9r^2\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]}$$

$$= \frac{160r^4\sin^6\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha - 180\sin\alpha}.$$

(Probe für den Halbkreis stimmt.)

Bemerkung. Diese Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Centrifugentheorie, denn bei etwa kugelförmiger Gestalt kann der Querschnitt der schnell rotierenden Flüssigkeit als Kreissegment betrachtet werden. Formel 1) ist in die Formel $K = \frac{2k'}{g}T\vartheta^2$ in Nr. 49 einzusetzen.

Fig. 157.



204) **Aufgabe.** Die Trägheitsmomente des Ringsektors zu berechnen.

Nach 44 handelt es sich in Bezug auf den Durchmesser um

$$T_y = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right],$$

in Bezug auf ME um

$$T_x = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right],$$

und in Bezug auf M um

$$T_p = \frac{r^4 - r_1^4}{720}\,\pi\alpha.$$

Da nach 11

$$MS = e_s = \frac{2h}{3\widehat{b}}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2\cdot 2r\sin\frac{\alpha}{2}}{3\cdot 2r\pi\frac{\alpha}{360}}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{240\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r_2 - r_1^2}$$

ist, so mufs für T_p und T_y

$$e_s^2 F = \frac{240^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi^2\alpha^2}\,\frac{(r^3 - r_1^3)^2}{(r^2 - r_1^2)^2}\,\frac{(r^2 - r_1^2)\,\pi\alpha}{360} = \frac{160\sin^2\frac{\alpha}{2}\,(r^3 - r_1^3)^2}{\pi\alpha\,(r^2 - r_1^2)}$$

abgezogen werden, wenn man die Reduktion auf den Schwerpunkt durchführen will.

205) **Aufgabe.** Die maximalen Centrifugalmomente in Bezug auf M für die letzten Querschnitte zu berechnen.

Auflösung. Sektor:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - 3\sin\alpha\right] - \frac{r^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{2r^4\sin\alpha}{16} = \frac{r^4\sin\alpha}{8}.$$

Segment:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4}{96}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 3\sin 2\alpha\right] - \frac{r^4}{96}\left[\frac{\pi\alpha}{30} - 8\sin\alpha + \sin 2\alpha\right]$$

$$= \frac{r^4}{96}[8\sin\alpha - 4\sin 2\alpha] = \frac{r^4}{24}[2\sin\alpha - \sin 2\alpha].$$

Ringsektor:

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2} = \frac{r^4 - r_1^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{180} + \sin\alpha\right] - \frac{r^4 - r_1^4}{16}\left[\frac{\pi\alpha}{160} - \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{r^4 - r_1^4}{16}\,2\sin\alpha = \frac{r^4 - r_1^4}{8}\sin\alpha.$$

206) **Bemerkung.** Die hier durchgeführte Methode läfst sich nicht nur auf concentrische Kreise, sondern auch auf Parallelkurven anwenden, die bekanntlich durch Abwickelung einer gemeinschaftlichen Evolute entstehen. Hierher gehört z. B. die Inhaltsberechnung der Kreisevolvente. Dagegen ist die Anwendung auf die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln, auf die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, auf konfokale Lemniskatenscharen und Hyperbelbüschel u. s. w. ausgeschlossen, weil hier die Breite der Elementarstreifen veränderlich

ist, so dafs die Anwendung der Rechtecksformel $\frac{h}{n} \cdot l$, wo $\frac{h}{n}$ die Breite, l die Länge des Streifens ist, unzulässig erscheint. Dort müssen also andere Methoden eintreten. Auf die Evolventen soll erst im nächsten Bande eingegangen werden.

E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

207) Nach dem Methodischen Lehrbuche Teil II, Anhang, ist, wenn die Querschnittsformel einer Kurve die Gestalt

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots$$

hat, die Neigung der Tangente gegen die Y-Achse an der Stelle y zu berechnen aus

$$\tan \alpha = b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots.$$

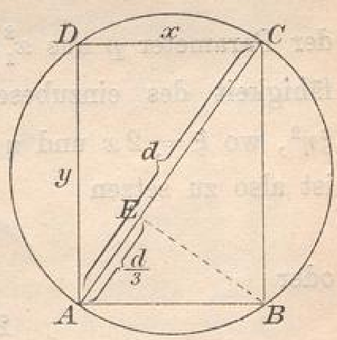
Ein Maximum oder Minimum kann im allgemeinen nur dann stattfinden, wenn dieser Wert gleich Null ist. Die fraglichen Stellen berechnen sich also aus

$$b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots = 0.$$

Die wirkliche Auswertung kann elementar höchstens bis zum 4ten Grade gehen. Trotzdem lassen sich einige wichtige Aufgaben mit Hülfe solcher Betrachtungen erledigen, wie die nachstehenden Beispiele zeigen.

Die Untersuchung, ob an entsprechender Stelle ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, oder ob die Kurve dort einen Rückkehrpunkt (eine Spitze), oder einen Wendepunkt oder sonstige Unregelmäfsigkeiten hat, läfst sich nur mit Hülfe der höheren Differentialquotienten hinlänglich scharf entscheiden. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Fig. 158.



208) **Aufgabe.** Aus einem kreisrunden Balken den rechteckigen Balken von gröfster Tragfähigkeit auszuschneiden.

Auflösung. Die Tragfähigkeit ist, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional dem Ausdrucke $\frac{xy^2}{6}$, oder auch $xy^2 = x(d^2 - x^2) = d^2x - x^3$. Stellt man $z = d^2x - x^3$ graphisch dar, so ergiebt sich als trigonometrische Tangente der geometrischen Tangente $\tan \alpha = d^2 - 3x^2$. Eine Maximalstelle ist nur möglich, wenn $d^2 - 3x^2 = 0$ ist, d. h. $x^2 = \frac{d^2}{3}$ oder $x = d\sqrt{\frac{1}{3}}$. Man kann x