Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

ist, so dafs die Anwendung der Rechtecksformel $\frac{h}{n} \cdot l$, wo $\frac{h}{n}$ die Breite, l die Länge des Streifens ist, unzulässig erscheint. Dort müssen also andere Methoden eintreten. Auf die Evolventen soll erst im nächsten Bande eingegangen werden.

E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima.

207) Nach dem Methodischen Lehrbuche Teil II, Anhang, ist, wenn die Querschnittsformel einer Kurve die Gestalt

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots$$

hat, die Neigung der Tangente gegen die Y-Achse an der Stelle y zu berechnen aus

$$\tan\alpha = b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots.$$

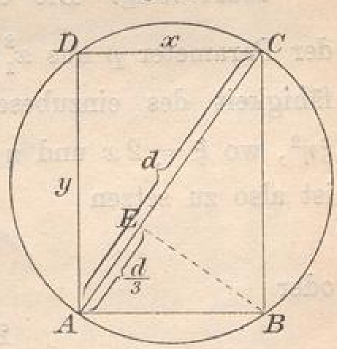
Ein Maximum oder Minimum kann im allgemeinen nur dann stattfinden, wenn dieser Wert gleich Null ist. Die fraglichen Stellen berechnen sich also aus

$$b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3 + \cdots = 0.$$

Die wirkliche Auswertung kann elementar höchstens bis zum 4ten Grade gehen. Trotzdem lassen sich einige wichtige Aufgaben mit Hülfe solcher Betrachtungen erledigen, wie die nachstehenden Beispiele zeigen.

Die Untersuchung, ob an entsprechender Stelle ein Maximum oder ein Minimum stattfindet, oder ob die Kurve dort einen Rückkehrpunkt (eine Spitze), oder einen Wendepunkt oder sonstige Unregelmäfsigkeiten hat, läfst sich nur mit Hülfe der höheren Differentialquotienten hinlänglich scharf entscheiden. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Fig. 158.

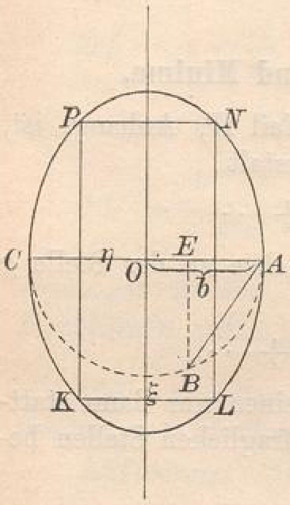


208) **Aufgabe.** Aus einem kreisrunden Balken den rechteckigen Balken von gröfster Tragfähigkeit auszuschneiden.

Auflösung. Die Tragfähigkeit ist, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional dem Ausdrucke $\frac{xy^2}{6}$, oder auch $xy^2 = x(d^2 - x^2) = d^2x - x^3$. Stellt man $z = d^2x - x^3$ graphisch dar, so ergiebt sich als trigonometrische Tangente der geometrischen Tangente $\tan\alpha = d^2 - 3x^2$. Eine Maximalstelle ist nur möglich, wenn $d^2 - 3x^2 = 0$ ist, d. h. $x^2 = \frac{d^2}{3}$ oder $x = d\sqrt{\frac{1}{3}}$. Man kann x

konstruieren als mittlere Proportionale zwischen d und $\frac{d}{3}$, indem man z. B. $AE = \frac{d}{3}$ macht und in E das Lot EB errichtet, was nach Pythagoras $AB = x$ giebt.

Fig. 159.



209) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen elliptischen Balken.

Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, die gesuchte Basis sei ξ, die zugehörige Höhe η. Die Tragfähigkeit ist proportional dem Ausdrucke $\xi\eta^2$, oder, da $\xi = 2x$ und

$$\eta^2 = (2y)^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)a^2 = 4a^2 - \frac{4a^2x^2}{b^2}$$

ist, proportional $8a^2x - \frac{8a^2x^3}{b^2}$, oder auch proportional $x - \frac{x^3}{b^2}$. Stellt man aber $z = x - \frac{x^3}{b^2}$ graphisch als Kurve dar, so ist ein Maximum nur möglich bei der durch $1 - \frac{3x^2}{b^2} = 0$ bestimmten Stelle, so dafs $x = b\sqrt{\frac{1}{3}}$ folgt, wie vorher, also $\xi = 2b\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Die Konstruktion erfolgt wie vorher. Man macht $AE = \frac{1}{3}AC$, errichtet das Lot EB bis zum Hülfskreise, dann ist AB die gesuchte Strecke ξ, der KL gleich zu machen ist.

210) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen parabolischen Querschnitt, der einem Rechteck mit den Seiten $2x_1$ und y_1 einbeschrieben ist.

Auflösung. Die Gleichung der Parabel ist $x^2 = 2py$, wo sich der Parameter p aus $x_1^2 = 2py_1$ als $p = \frac{x_1^2}{2y_1}$, bestimmt. Die Tragfähigkeit des einzubeschreibenden Rechtecks wird proportional zu $\xi\eta^2$, wo $\xi = 2x$ und $\eta = y_1 - y = y_1 - \frac{x^2}{2p}$ zu setzen ist. Für $\xi\eta^2$ ist also zu setzen

$$2x\left(y_1 - \frac{x^2}{2p}\right)^2$$

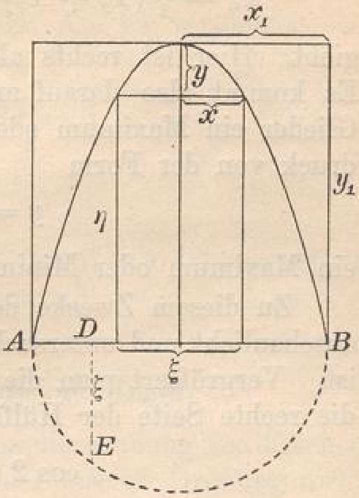
oder

$$2x\left(y_1^2 - \frac{2y_1x^2}{2p} + \frac{x^4}{4p^2}\right)$$

oder endlich, da der Faktor 2 überflüssig ist,

$$z = y_1^2x - \frac{y_1x^3}{p} + \frac{x^5}{4p^2}.$$

Fig. 160.



Stellt man z graphisch als Curve dar, so handelt es sich um die Stelle, wo

$$\tan\alpha = y_1^2 - \frac{3\,y_1}{p}\,x^2 + \frac{5\,x^4}{4\,p^2} = 0$$

ist. Das entsprechende x ergiebt sich aus der Gleichung

$$x^4 - \frac{12\,p\,y_1}{5}\,x^2 = -\frac{4\,p^2}{5}\,y_1^2,$$

aus der

$$x^2 = \frac{6\,p\,y_1}{5} \pm \sqrt{\frac{36\,p^2\,y_1^2}{25} - \frac{20\,p^2\,y_1^2}{25}}$$
$$= \frac{6\,p\,y_1}{5} \pm \frac{4\,p\,y_1}{5}$$

folgt, oder

$$x = \sqrt{\frac{10\,p\,y_1}{5}} \quad \text{bezw.} \quad x = \sqrt{\frac{2\,p\,y_1}{5}},$$

die Basis wird also entweder

$$\xi = 2\sqrt{\frac{10\,p\,y_1}{5}} = 2\sqrt{\frac{2\,x_1^2}{2\,y_1}\,y_1} = 2\,x_1$$

oder

$$\xi = 2\sqrt{\frac{2\,p\,y_1}{5}} = 2\sqrt{\frac{2\,x_1^2}{5\cdot 2\,y_1}\,y_1} = 2\,x_1\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Das erste giebt aber $\eta = 0$, d. h. einen Balken von der Tragfähigkeit Null, was hier kein Maximum, sondern höchstens ein Minimum bedeuten kann. Die zweite Lösung giebt ein Maximum, und zwar läfst sich $\xi = \sqrt{\frac{4\,x_1^2}{5}}$ als mittlere Proportionale zwischen $AB = 2\,x_1$ und $\frac{2}{5}\,x_1 = \frac{AB}{5}$ konstruieren. Ist also $AD = \frac{1}{5}\,AB$, so giebt das Lot DE bis zum Hülfskreise das gesuchte ξ.

211) Um eine Variante in der Behandlung der Aufgaben über Maxima und Minima bekannt zu geben, soll die in Nr. 141 behandelte Aufgabe, die Trägheitshauptachsen für eine Fläche F aus T_x, T_y und M_{xy} zu bestimmen, auf eine andere Art gelöst werden. Man wandle die Gleichung

$$T_\alpha = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$

mit Ausnahme des letzten Postens ebenso um, wie in Nr. 141, was

$$T_\alpha = \tfrac{1}{2}(T_y + T_x) - \tfrac{1}{2}(T_y - T_x)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$

giebt. Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Gröfse α. Es kommt also darauf an, zu untersuchen, wann die beiden letzten Glieder ein Maximum oder ein Minimum geben, d. h. wann ein Ausdruck von der Form

$$y = a\cos 2x + b\sin 2x$$

ein Maximum oder Minimum giebt.

Zu diesem Zwecke denke man sich den Ausdruck als Curve veranschaulicht und untersuche, an welcher Stelle die Tangente horizontal ist. Vergröfsert man die Abscisse um eine kleine Gröfse ξ, so geht die rechte Seite der Hülfsgleichung über in

$$a\cos 2(x+\xi) + b\sin 2(x+\xi).$$

Subtraktion der beiden rechten Seiten von einander giebt

$$a[\cos 2(x+\xi) - \cos 2x] + b[\sin 2(x+\xi) - \sin 2x].$$

Da die Nachbarordinaten bei horizontaler Tangente gleich sein müssen, so ist diese Differenz gleich Null zu setzen, also, wenn man nach bekannten goniometrischen Formeln umformt,

$$-\frac{a}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)+2x}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)-2x}{2}$$
$$+\frac{b}{2}\cos\frac{(2x+2\xi)+2x}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)-2x}{2} = 0.$$

Division durch den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2}\sin\frac{(2x+2\xi)-2x}{2}$ giebt

$$-a\sin(2x+\xi) + b\cos(2x+\xi) = 0$$

oder

$$\tan(2x+\xi) = \frac{b}{a},$$

oder, da ξ unendlich klein gedacht werden sollte,

$$\tan 2x = \frac{b}{a}.$$

Setzt man für a und b die eigentlichen Faktoren wieder ein, so folgt wie früher

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2M_{xy}}{T_y - T_x}$$

zur Bestimmung der Lage der beiden Hauptachsen.

[Setzt man die Reihenentwickelung für $\sin 2x$ und $\sin 2y$ als bekannt voraus und wendet man die Formel für den Neigungswinkel α der Tangente auf die Reihen an, wozu man Method. Lehrbuch Band 2, Anhang oder Band 3, Algebr. An. VI vergleiche, so findet man sofort als mafsgebende Gleichung

$$-2a\cos 2x + 2b\sin 2x = 0$$

oder

$$\tan 2x = \frac{b}{a}$$

zur Bestimmung der betreffenden Stelle. Damit würde eine dritte Lösung dieses wichtigen Problems gegeben sein.]

F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel.

212) Reichen die bisherigen Methoden zur Berechnung von Flächen oder Körpern oder ihrer Momente erster oder zweiter Ordnung nicht aus, so ist man zu Annäherungsversuchen genötigt.

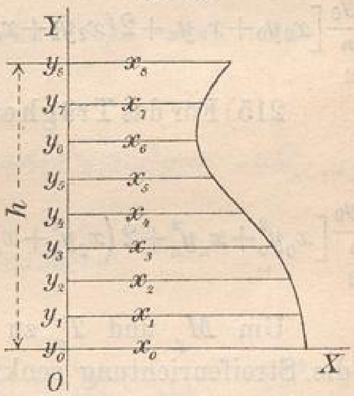
Eine erste Annäherung würde die Trapezformel geben, die darauf beruht, dafs man die einzelnen Streifen gleicher Höhe als Trapeze berechnet. Addiert man die Resultate, so ergiebt sich z. B. für Fig. 161, wo übrigens $y_0 = 0$ ist,

$$\overset{y_8}{\underset{y_0}{F}} = \frac{y_8 - y_0}{2 \cdot 8} \cdot \left[x_0 + x_8 + 2\,(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7)\right].$$

Das Resultat wird einigermafsen brauchbar, wenn die Kurve gegen die Y-Achse bald konkav, bald konvex ist. Das Resultat wird aber zu klein, wenn sie überall konkav, zu grofs, wenn sie überall konvex ist.

Es ist leicht, die Formel für $\overset{y_8}{\underset{y_1}{F}}$ oder $\overset{y_8}{\underset{y_2}{F}}$ u. s. w. aufzustellen.

Fig. 161.



213) Ein weit genaueres Resultat giebt in der Regel die verallgemeinerte Simpsonsche Formel, die darauf beruht, dafs man eine gerade Anzahl von Streifen annimmt und auf jeden Doppelstreifen die Simpsonsche Regel anwendet.

Thut man dies, so ergiebt sich z. B. für Fig. 161

$$\overset{y_8}{\underset{0}{F}} = \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4}\left[x_0 + x_8 + 2\,(x_2 + x_4 + x_6) + 4\,(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)\right],$$

allgemein für n Streifen oder $\frac{n}{2}$ Doppelstreifen