



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Ihr isogonaler (konformer) Charakter.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Auf das zweifache Entsprechen soll nur noch aufmerksam gemacht werden, wenn es besonders nötig erscheint.

221) Jeder Punktfolge oder Curve der einen Ebene entspricht eine Curve der andern. In Polarkoordinaten entsprechen einander die Curven

$$f(R, \Phi) = 0 \quad \text{und} \quad f[(r^2), (2\varphi)] = 0,$$

$$f[(\sqrt{R}), (\frac{\Phi}{2})] = 0 \quad \text{und} \quad f(r, \varphi) = 0.$$

222) Wichtig ist nun Folgendes:

Jedem rechtwinkligen Flächenstücke $ABCD$ der Z -Ebene, welches von den besprochenen Kreisen und Geraden begrenzt wird, entspricht ein rechtwinkliges Flächenstück $A_1B_1C_1D_1$ der andern Ebene, und zwar wird behauptet, bei hinreichender Kleinheit seien beide „Rechtecke“ einander ähnlich, ihre Maßstäbe verhielten sich wie $2\varrho:1$, wo $\varrho = OA_1$, also $\varrho^2 = OA$ ist, ihre Flächen also wie $4\varrho^2:1$.

Beweis. Man setze $OA_1 = \varrho$, also $OA = \varrho^2$, $OB_1 = r$, also $OB = r^2$, den zum Radius $OM = 1$ gehörigen

Bogen $\widehat{E_1F_1} = \alpha$, also $\widehat{EF} = 2\alpha$,

so daß Bogen $A_1D_1 = \varrho\alpha$, $\widehat{AD} = \varrho^2 2\alpha = 2\varrho^2\alpha$ und demnach

$$\frac{\widehat{AD}}{\widehat{A_1D_1}} = \frac{2\varrho^2\alpha}{\varrho\alpha} = \frac{2\varrho}{1}$$

wird. Ebenso wird

$$\widehat{B_1C_1} = r\alpha, \quad \widehat{BC} = r^2 2\alpha = 2r^2\alpha,$$

folglich

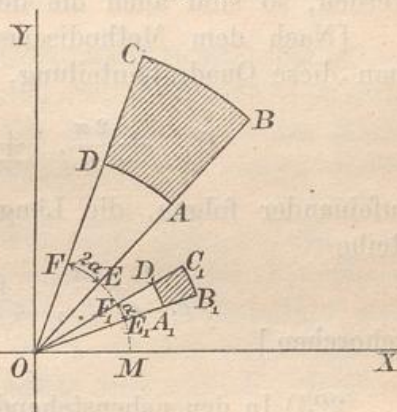
$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2r^2\alpha}{r\alpha} = \frac{2r}{1},$$

wofür, wenn die Dimensionen der Rechtecke unendlich klein sind, also für die Grenze $r = \varrho$ zu setzen ist, geschrieben werden kann

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2\varrho}{1}.$$

Für die beiden Bogenpaare ist also das obige Verhältnis als richtig nachgewiesen.

Fig. 163.



Ferner ist

$$A_1 B_1 = r - \varrho, \text{ also } AB = r^2 - \varrho^2 = (r + \varrho)(r - \varrho),$$

demnach

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{r^2 - \varrho^2}{r - \varrho} = \frac{(r + \varrho)(r - \varrho)}{r - \varrho} = \frac{r + \varrho}{1}.$$

Bei unendlicher Kleinheit der Dimensionen strebt dieses Verhältnis der Größe $\frac{\varrho + \varrho}{1}$ oder $\frac{2\varrho}{1}$ zu, wie es oben behauptet war.

Weil bei unendlicher Kleinheit alle Rechtecksseiten sich wie $2\varrho:1$ verhalten, sind die sich entsprechenden kleinen Rechtecke beider Ebenen als ähnlich zu betrachten. Dürfen z. B. die kleinen „Rechtecke“ der einen Ebene als „Quadrate“ betrachtet werden, so sind auch die der andern als „Quadrate“ zu betrachten.

[Nach dem Methodischen Lehrbuch (Teil II, Anhang) erreicht man diese Quadrateinteilung, wenn die Strahlen unter den Winkeln

$$0, \pm \frac{2\pi}{n}, \pm \frac{4\pi}{n}, \pm \frac{6\pi}{n}, \pm \frac{8\pi}{n}, \dots$$

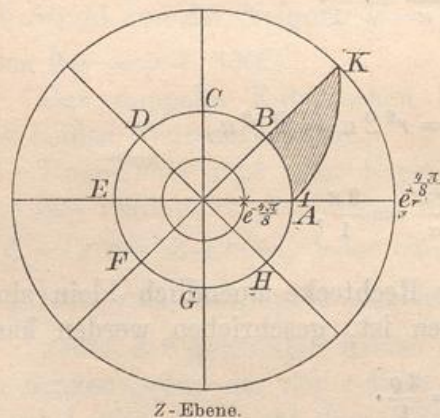
aufeinander folgen, die Längen der Radien aber der geometrischen Reihe

$$e, e^{\pm \frac{2\pi}{n}}, e^{\pm \frac{4\pi}{n}}, e^{\pm \frac{6\pi}{n}}, e^{\pm \frac{8\pi}{n}}, \dots$$

gehörchen.]

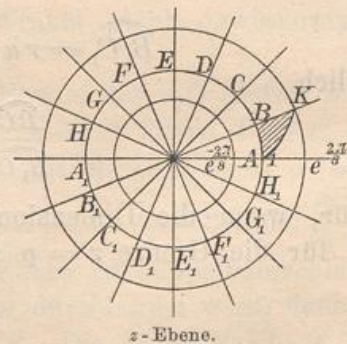
223) In den nebenstehenden Figuren sind die sich gegenseitig entsprechenden Quadratnetze für einfache Winkelteilungen 16 bzw. 8 dargestellt, wobei das doppelte Entsprechen klar hervortritt.

Fig. 164.



Z-Ebene.

Fig. 165.



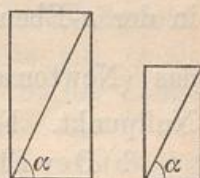
z-Ebene.

Die Diagonalkurven der Quadratnetze sind logarithmische Spiralen, die das Strahlenbüschel und die Kreisschar unter 45° durchsetzen, so

dafs auch die kleinen „Dreiecke“ AKB beider Ebenen einander ähnlich sind.

224) Bei ähnlichen „Rechtecken“ stimmen die Diagonalwinkel ebenfalls überein, und so schließt man überhaupt, dafs einander entsprechende Winkel (mit Schenkeln von unendlich kleiner Länge) beider Ebenen übereinstimmen, so dafs die Beziehung eine winkeltreue oder isogonale ist, und dafs unendlich kleinen Dreiecken der einen Ebene unendlich kleine und ähnliche der andern entsprechen, kleinen geometrischen Gebilden ähnliche Gebilde der andern entsprechen. Man sagt, beide Ebenen seien in den kleinsten Teilen ähnlich, die Abbildung der einen auf die andere sei eine konforme.

Fig. 166.



Wie man nun ein Gemälde mit Hülfe eines Quadratnetzes vergrößert oder verkleinert wiedergeben kann, so kann man mit Hülfe der hier besprochenen Quadratnetze zu den Gebilden der einen Ebene mit beliebiger Genauigkeit die entsprechenden der andern Ebene konstruieren.

Das Vergrößerungsverhältnis ist, wie oben gezeigt wurde, für jede Stelle $2\varrho : 1$, wo ϱ den Abstand des kleinen Gebildes der z -Ebene vom Nullpunkte bedeutet. In der Umgebung des Nullpunktes wird es zu $0 : 1$, im unendlichen Bereiche zu $\infty : 1$, so dafs beide Bereiche Ausnahmestellung einnehmen. Im Nullpunkte hört auch die „Ähnlichkeit“ auf, da dort 2γ und γ einander entsprechen.

225) In technischer und mechanischer Hinsicht ist nun Folgendes von Wichtigkeit:

Jedem Flächenelemente f der z -Ebene, welches die Entfernung ϱ vom Nullpunkte hat, entspricht in der Z -Ebene ein solches von der Gröfse $4\varrho^2 f$, jeder Fläche $F = \sum f$ der ersteren entspricht also in der letzteren eine Fläche vom Inhalte $F_1 = \sum 4\varrho^2 f = 4 \sum f \varrho^2$. Letzterer Ausdruck ist aber das vierfache polare Trägheitsmoment des Flächenstückes F in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der wichtige Satz:

a) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der Z -Ebene ist viermal so groß, wie das Trägheitsmoment des entsprechenden Gebildes der z -Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

226) Jedem Flächenstück f_1 der Z -Ebene entspricht ein solches von der Gröfse $f = \frac{f_1}{4\varrho^2} = \frac{f_1}{4\varrho_1^2}$ in der z -Ebene, wo ϱ_1 der Abstand