Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

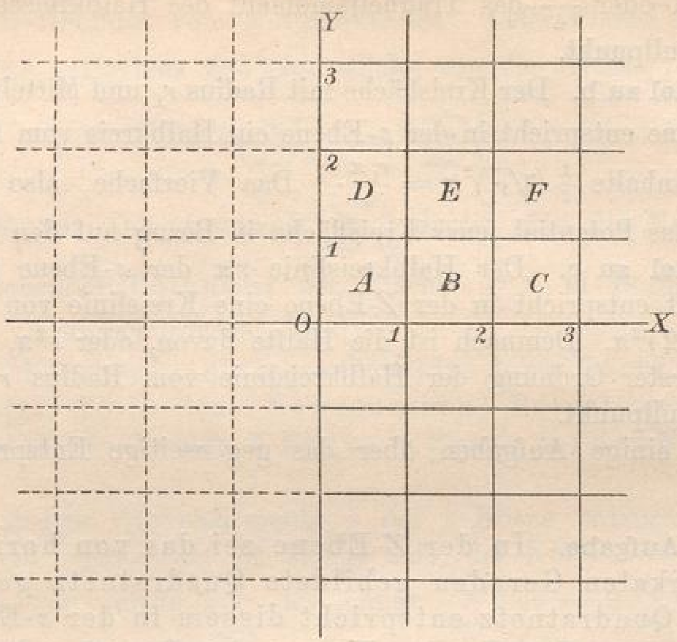
Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln.

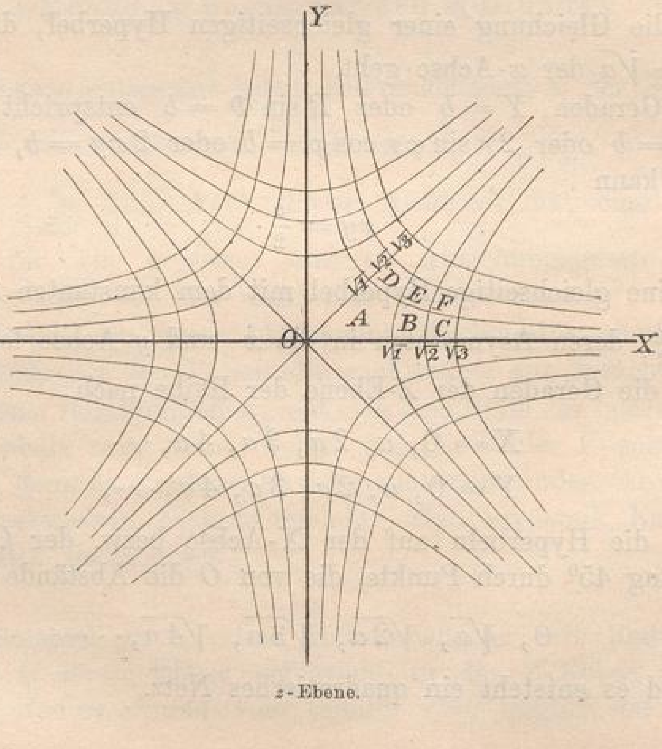
Fig. 167.



Z-Ebene.

231) Für $a = 1$ ist dieses gegenseitige Entsprechen in den Figuren 167 und 168 dargestellt. Dort hat jedes Quadrat den Inhalt 1, folglich:

Fig. 168.



z-Ebene.

Jedes der hyperbolischen Quadrate der Fig. 168 hat in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{1}{4}$.

Jede Quadratseite der Z-Ebene hat die Länge 1, folglich:

Jede Seite der hyperbolischen Quadrate hat in Bezug auf den Nullpunkt das Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{1}{2}$.

232) Aus den Beziehungen $X = x^2 - y^2$ und $Y = 2xy$ folgt ferner der

Satz: Jeder Kurve $f(XY) = 0$ der Z-Ebene entspricht in der z-Ebene eine Kurve $f[(x^2 - y^2), (2xy)] = 0$.

Da aus jenen Beziehungen folgende sich ergeben:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}},$$

so folgt der entsprechende

Satz: Jeder Kurve $f(xy) = 0$ der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene eine Kurve

$$f\left[\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}}\right] = 0.$$

233) **Aufgabe.** Was entspricht der Geraden

$$\frac{Y}{X - a} = A = \tan \alpha$$

durch den Punkt a der Z-Ebene?

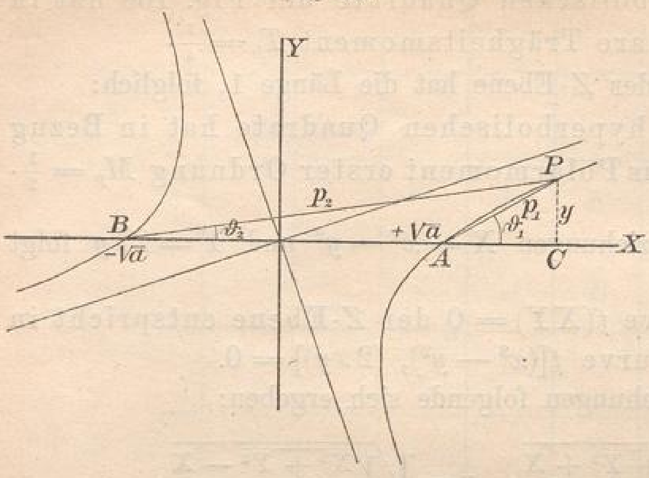
Auflösung. Ihr entspricht die Kurve

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a} = A, \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 - \frac{2}{A} xy = a.$$

Setzt man zugleich $-x$ und $-y$ statt x und y ein, so ändert sich nichts, so dafs es sich um die Mittelpunktsgleichung eines Kegelschnitts handelt, der, weil er unendlich ferne Punkte enthält, eine Hyperbel sein mufs. Nun liegen aber die unendlich fernen Punkte der Geraden auch von O aus gesehen in den Richtungen α und $\alpha + 180^0$, folglich die der Hyperbel, von O aus gesehen, in den Richtungen $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{2} + 90^0$. Dies sind also die Asymptotenrichtungen, und da sie auf einander senkrecht stehen, handelt es sich wieder um eine gleichseitige Hyperbel.

Folgerung: Jedem schrägen Quadratnetz in der Z-Ebene entspricht ein schräges Quadratnetz gleichseitiger Hyperbeln.

Fig. 169.



Ferner: Die isogonalen Trajektorien jeder solchen Hyperbelschar sind wiederum gleichseitige Hyperbeln.

234) Für jede solche Hyperbel besteht eine wichtige Winkelbeziehung. Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt P der Kurve mit den Schnittpunkten $\pm\sqrt{a}$ auf der X-Achse, so folgt für die Neigungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 der Verbindungslinien p_1 und p_2 Folgendes:

$$\tan\vartheta_1 = \frac{CP}{AC} = \frac{y}{x-\sqrt{a}}, \quad \tan\vartheta_2 = \frac{CP}{BC} = \frac{y}{x+\sqrt{a}},$$

folglich

$$\tan(\vartheta_1+\vartheta_2) = \frac{\tan\vartheta_1+\tan\vartheta_2}{1-\tan\vartheta_1\tan\vartheta_2} = \frac{\dfrac{y}{x-\sqrt{a}}+\dfrac{y}{x+\sqrt{a}}}{1-\dfrac{y}{x-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{y}{x+\sqrt{a}}} = \frac{2xy}{x^2-y^2-a}.$$

Nach Obigem ist aber letzteres gleich A oder gleich $\tan\alpha$, es folgt also

$$\tan(\vartheta_1+\vartheta_2) = \tan\alpha,$$

folglich auch

$$\vartheta_1+\vartheta_2 = \alpha.$$

Also, wenn man die Geraden p_1 und p_2 als Radii vectores (nicht mit den gewöhnlichen Brennstrahlen zu verwechseln) bezeichnen will:

Für die gleichseitige Hyperbel ist die Winkelsumme der Radii vectores konstant.

Jetzt kann man sich kurz folgendermaſsen ausdrücken:

Der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Punkt a der Z-Ebene entspricht die gleichseitige Hyperbel $\vartheta_1+\vartheta_2=\gamma$ durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$ der z-Ebene.

Dem Strahlenbüschel durch den Punkt a, dessen Neigungswinkel durch $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ gegeben sind, entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$, deren Winkelsummen $(\vartheta_1+\vartheta_2)$ nach derselben Reihe aufeinander folgen.

235) **Aufgabe.** Was entspricht dem Kreise $R = c$ um den Punkt a der Z-Ebene?

Auflösung. Ihm entspricht, da sich statt $R = c$ auch $(X - a)^2 + Y^2 = c^2$ schreiben läfst, nach Nr. 232 die Kurve

$$(x^2 - y^2 - a)^2 + (2xy)^2 = c^2,$$

deren Gleichung sich folgendermafsen umformen läfst:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ax^2 + 2ay^2 + a^2 = c^2,$$
$$(x^2 + y^2 + a)^2 - 4ax^2 = c^2,$$
$$(x^2 + y^2 + a + 2x\sqrt{a})(x^2 + y^2 + a - 2x\sqrt{a}) = c^2.$$

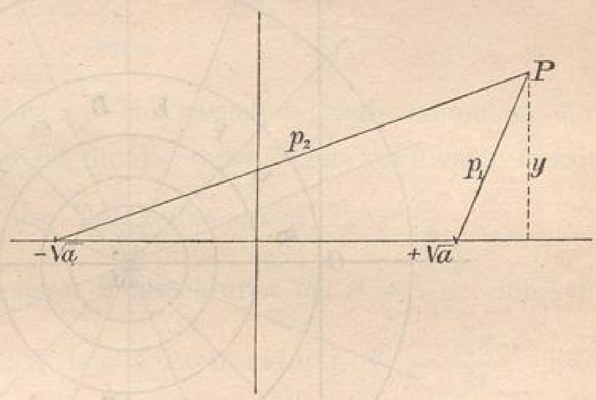
Verbindet man aber wiederum einen Punkt P der Kurve mit den Punkten $\pm\sqrt{a}$, so gilt für die Verbindungslinien

$$p_1^2 = (x - \sqrt{a})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a - 2x\sqrt{a},$$
$$p_2^2 = (x + \sqrt{a})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a + 2x\sqrt{a}.$$

Demnach läfst sich die Kurvengleichung auch schreiben als $p_1^2 p_2^2 = c^2$, oder endlich als

$$p_1 p_2 = c.$$

Fig. 170.



Dies ist die bekannte Gleichung der Lemniskaten zweiter Ordnung oder Cassinischen Kurven, zu denen auch die in Nr. 142 besprochene gleichseitige Lemniskate gehört. Die Punkte $\pm\sqrt{a}$ heifsen ihre Brennpunkte, die Geraden p_1 und p_2 ihre Brennstrahlen. Also:

Jedem Kreise $R = c$ um den Punkt a der Z-Ebene entspricht in der z-Ebene eine Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{a}$.

Folgen die Radien der Kreise der Gröfse nach folgendermafsen aufeinander:

$$e^0,\quad e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\quad e^{\pm\frac{4\pi}{n}},\quad e^{\pm\frac{6\pi}{n}},\ \ldots,$$

so folgen die konstanten Produkte $p_1 p_2$ nach derselben Reihe aufeinander.

236) **Folgerung:** Ist in der Z-Ebene eine Kurve in Polarkoordinaten in Bezug auf den Punkt a durch die Gleichung $f(R, \Theta) = 0$ gegeben, so entspricht ihr in der z-Ebene eine Kurve von der auf $\pm\sqrt{a}$ bezogenen Gleichung

$$f[(p_1 p_2), (\vartheta_1 + \vartheta_2)] = 0.$$

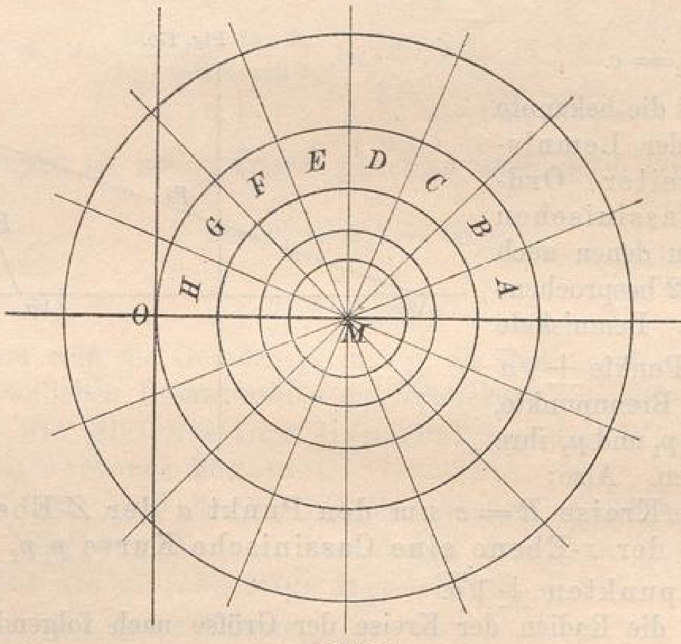
Die Variabelen $(p_1 p_2)$ und $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ sind die zuerst von Lamé aufgestellten lemniskatischen Koordinaten, deren Anwendung für die mathematische Physik von grofser Bedeutung ist und viele Rechnungserleichterungen giebt.

237) **Aufgabe.** Es soll bewiesen werden, dafs alles, was vom Punkte a gesagt ist, auch von jedem beliebigen Punkte mit den Koordinaten a und b gilt.

Die Ausführung ist nur eine Wiederholung der obigen Rechnungen.

238) In Fig. 161 und 162 ist das gegenseitige Entsprechen in Bezug auf den Punkt a dargestellt ($OM = a$). Dem Quadratnetz der Polarkoordinaten entspricht das Quadratnetz der lemniskatischen Koordinaten.

Fig. 171.

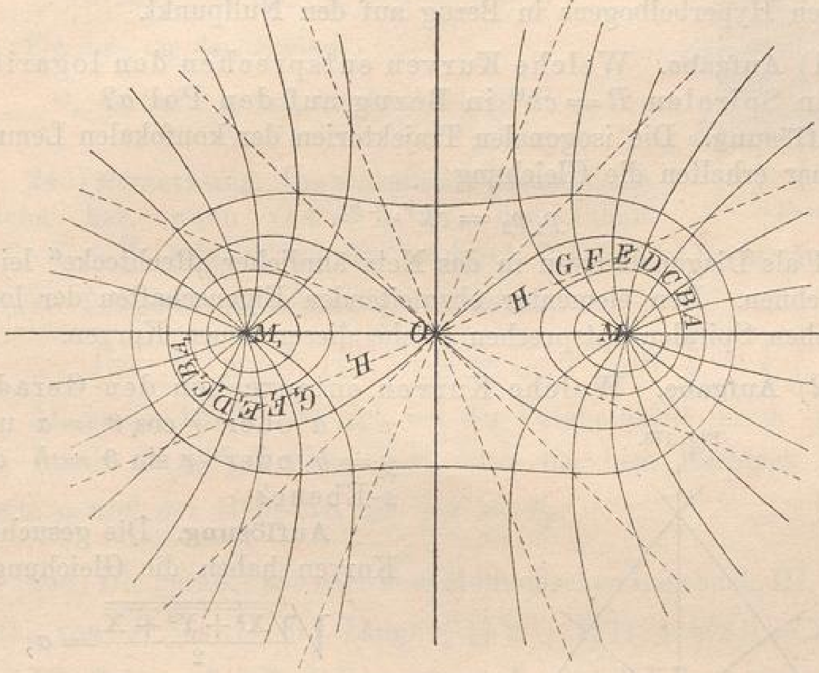


Z-Ebene.

239) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment für die halbe Lemniskate, für jede halbe Cassinische Kurve, für jeden hyperbolischen Sektor einer solchen u. s. w. in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der gewöhnlichen Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{c}$ entspricht ein Kreis $R = c$ um den Punkt c.

Fig. 172.



z-Ebene.

Sein Inhalt ist $c^2\pi$, folglich ist $\frac{c^2\pi}{4}$ das gesuchte Trägheitsmoment der halben Lemniskate. Ebenso ist für die zugehörigen konfokalen Cassinischen Kurven $p_1 p_2 = c_1$ das Trägheitsmoment $T_p = \frac{c_1^2 \pi}{4}$.

Für jeden der gezeichneten Kreissektoren ist $F = \frac{c_1^2\pi}{16}$, folglich für jeden der hyperbolischen Lemniskatensektoren $T_p = \frac{c_1^2\pi}{64}$. Für jeden Kreisring ist $F = \pi\left(c^2 - c_1^2\right)$, folglich für jeden halben lemniskatischen Ring $T_p = \frac{\pi}{4}\left(c^2 - c_1^2\right)$.

240) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Polarmoment erster Ordnung der lemniskatischen und hyperbolischen Kurven in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{c}$ entspricht ein Kreis vom Umfange $2c\pi$. Das Polarmoment der Halblemniskate ist halb so grofs, also gleich $c\pi$. Für jede konfokale Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c_1$ ist jener Kreisumfang gleich