Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

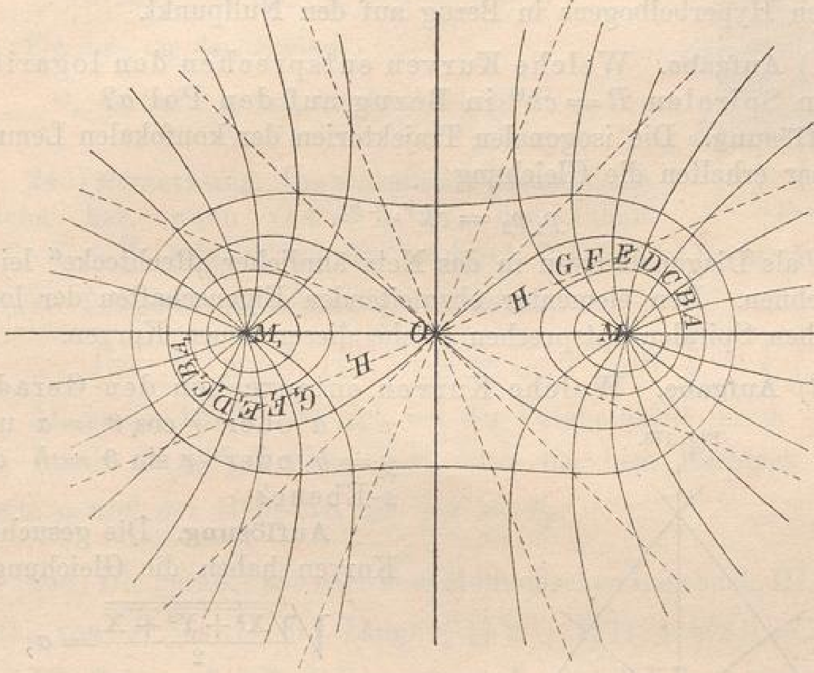
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die konfokalen Lemniskaten und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln.

Auflösung. Der gewöhnlichen Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{c}$ entspricht ein Kreis $R = c$ um den Punkt c.

Fig. 172.



z-Ebene.

Sein Inhalt ist $c^2\pi$, folglich ist $\frac{c^2\pi}{4}$ das gesuchte Trägheitsmoment der halben Lemniskate. Ebenso ist für die zugehörigen konfokalen Cassinischen Kurven $p_1 p_2 = c_1$ das Trägheitsmoment $T_p = \frac{c_1^2\pi}{4}$.

Für jeden der gezeichneten Kreissektoren ist $F = \frac{c_1^2\pi}{16}$, folglich für jeden der hyperbolischen Lemniskatensektoren $T_p = \frac{c_1^2\pi}{64}$. Für jeden Kreisring ist $F = \pi\left(c^2 - c_1^2\right)$, folglich für jeden halben lemniskatischen Ring $T_p = \frac{\pi}{4}\left(c^2 - c_1^2\right)$.

240) **Aufgabe.** Wie grofs ist das Polarmoment erster Ordnung der lemniskatischen und hyperbolischen Kurven in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{c}$ entspricht ein Kreis vom Umfange $2c\pi$. Das Polarmoment der Halblemniskate ist halb so grofs, also gleich $c\pi$. Für jede konfokale Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c_1$ ist jener Kreisumfang gleich

$2c_1\pi$, also das Polarmoment erster Ordnung der Kurve gleich $c_1\pi$. Der Hyperbel von $p_1 p_2 = 0$ bis $p_1 p_2 = c$ entspricht ein Kreisradius von Länge c. Demnach ist $\frac{c}{2}$ das Polarmoment erster Ordnung des genannten Hyperbelbogens in Bezug auf den Nullpunkt.

241) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den logarithmischen Spiralen $R = ck^{\Theta}$ in Bezug auf den Pol a?

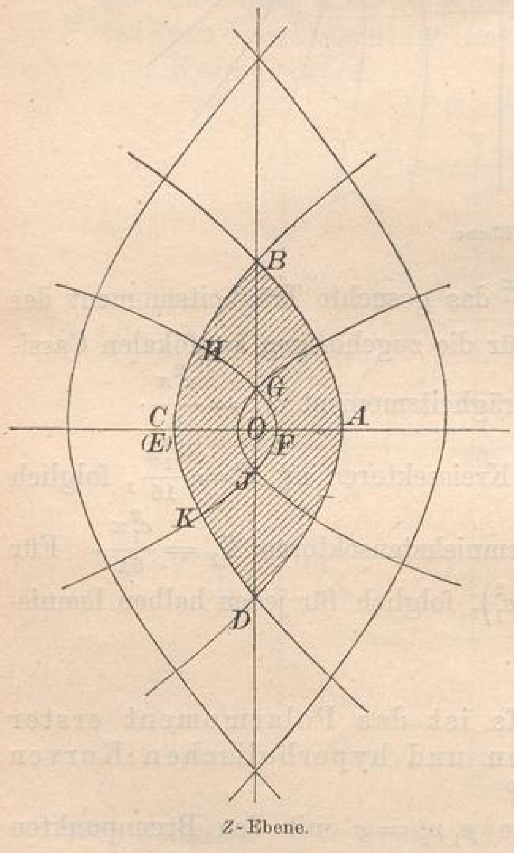
Auflösung. Die isogonalen Trajektorien der konfokalen Lemniskatenschar erhalten die Gleichung

$$p_1 p_2 = ck^{\vartheta_1 + \vartheta_2}.$$

Sie sind als Diagonalkurven in das Netz ähnlicher „Rechtecke" leicht einzuzeichnen. Den elementar abzuleitenden Eigenschaften der logarithmischen Spiralen entsprechen solche dieser neuen Kurven.

242) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den Geraden $x = a$ oder $r \cos\vartheta = a$ und $y = b$ oder $r \sin\vartheta = b$ der z-Ebene?

Fig. 173.



Z-Ebene.

Auflösung. Die gesuchten Kurven haben die Gleichungen

$$\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} = a,$$

oder $$\sqrt{R}\cos\frac{\Phi}{2} = a,$$

oder $$R\,\frac{1+\cos\Phi}{2} = a^2$$

und

$$\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}} = b,$$

oder $$\sqrt{R}\sin\frac{\Phi}{2} = b,$$

oder $$R\,\frac{1-\cos\Phi}{2} = b^2.$$

Dies sind wiederum Kegelschnittgleichungen, und zwar Brennpunktsgleichungen von Parabeln, wie man erkennt, wenn man bei einer davon durch Koordinatenverschiebung nach a^2 die Scheitelgleichung bildet.

Folgen in der z-Ebene die beiden Schaaren von Geraden in den Abständen

$$0,\ \pm a,\ \pm 2a,\ \pm 3a,\ \pm 4a,\ \cdots$$