Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die Doppelschaar konfokaler Parabeln.

$2 c_1 \pi$, also das Polarmoment erster Ordnung der Kurve gleich $c_1 \pi$. Der Hyperbel von $p_1 p_2 = 0$ bis $p_1 p_2 = c$ entspricht ein Kreisradius von Länge c. Demnach ist $\frac{c}{2}$ das Polarmoment erster Ordnung des genannten Hyperbelbogens in Bezug auf den Nullpunkt.

241) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den logarithmischen Spiralen $R = ck^{\Theta}$ in Bezug auf den Pol a?

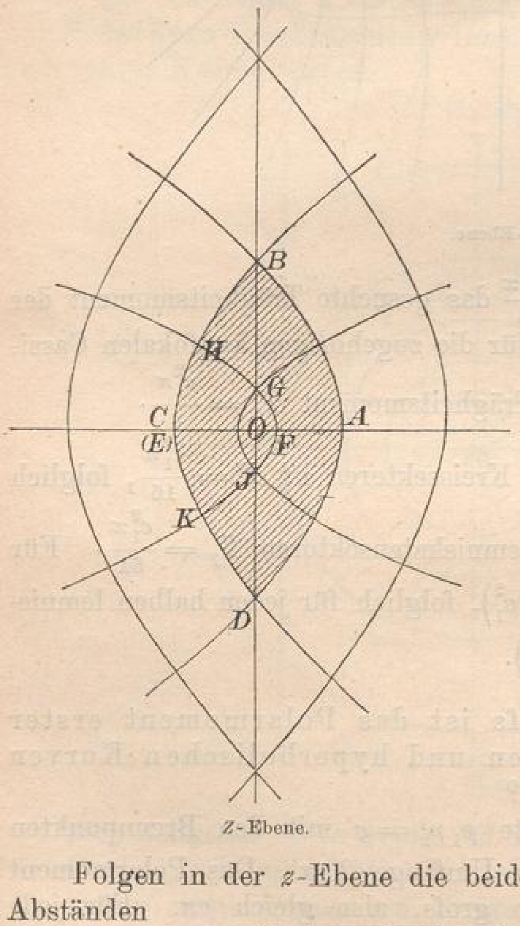
Auflösung. Die isogonalen Trajektorien der konfokalen Lemniskatenschar erhalten die Gleichung

$$p_1 p_2 = ck^{\vartheta_1 + \vartheta_2}.$$

Sie sind als Diagonalkurven in das Netz ähnlicher „Rechtecke" leicht einzuzeichnen. Den elementar abzuleitenden Eigenschaften der logarithmischen Spiralen entsprechen solche dieser neuen Kurven.

242) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den Geraden $x = a$ oder $r \cos \vartheta = a$ und $y = b$ oder $r \sin \vartheta = b$ der z-Ebene?

Fig. 173.



Z-Ebene.

Auflösung. Die gesuchten Kurven haben die Gleichungen

$$\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}} = a,$$

oder $$\sqrt{R} \cos \frac{\Phi}{2} = a,$$

oder $$R \frac{1 + \cos \Phi}{2} = a^2$$

und

$$\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}} = b,$$

oder $$\sqrt{R} \sin \frac{\Phi}{2} = b,$$

oder $$R \frac{1 - \cos \Phi}{2} = b^2.$$

Dies sind wiederum Kegelschnittgleichungen, und zwar Brennpunktsgleichungen von Parabeln, wie man erkennt, wenn man bei einer davon durch Koordinatenverschiebung nach a^2 die Scheitelgleichung bildet.

Folgen in der z-Ebene die beiden Schaaren von Geraden in den Abständen

$$0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a, \cdots$$

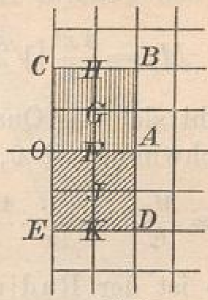
aufeinander, so schneiden die Parabeln der Z-Ebene die X-Achse an den Stellen

$$0,\ \pm a^2,\ \pm 4a^2,\ \pm 9a^2,\ \pm 16a^2,$$

die Y-Achse an den Stellen

$$0,\ \pm 2a^2,\ \pm 8a^2,\ \pm 18a^2,\ \pm 32a^2.$$

Fig. 174.



z-Ebene.

243) **Bemerkung.** Die schraffierte parabolische Fläche hat, wenn $OA = 1$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$, folglich hat das Rechteck $EDBC$ in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $\frac{4}{3}$. [Probe:

$$\left(\frac{1 \cdot 2^3}{12} + \frac{2 \cdot 1^3}{12}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{2}{12}\right) + \frac{2}{4} = \frac{4}{3}.]$$

Allgemein handelt es sich bei der Parabelfläche durch $+ a^2$ um den Inhalt $\frac{2}{3}(2a^2)(4a^2) = \frac{16}{3}a^2$, also bei dem Rechteck von der Breite a und der Höhe $2a$ um $\frac{4}{3}a^2 = T_p$.

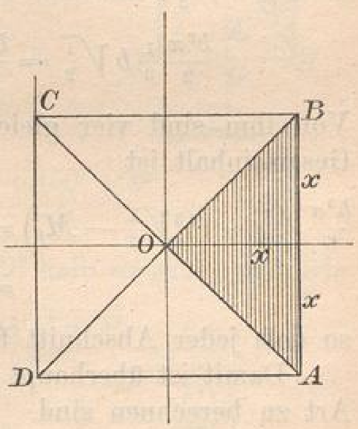
244) Die Parabel hat nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlufsseite, von B bis D die Länge $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = 1{,}1478\,p$. Ist also $OA = a^2$ und $BD = p = 4a^2$, so handelt es sich um die Länge

$$2a^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2}) = 1{,}1478 \cdot 4a^2.$$

Halb so grofs ist das Polarmoment der Geraden von Länge $BD = 2a$ (Fig. 174) im Abstande a von O, also gleich

$$a^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$
$$= 1{,}1478 \cdot 2a^2 = 2{,}2956\,a^2.$$

Fig. 175.



Denkt man sich jetzt die Länge $2a$ und den Abstand veränderlich als $2x$ bezw. x, so hat man im letzten eine Querschnittsformel

$$q_x = x^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$

für ein Dreieck OAB in Bezug auf O. (Fig. 175.) Für dieses ganze Dreieck ist also das Polarmoment erster Ordnung nach der Schichtenformel

$$M_p = \frac{x^3}{3}[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = \frac{1{,}1478 \cdot 2x^3}{3};$$