Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Anwendungen auf Dreieck, Rechteck, parabolische Sektoren, Hyperbelsegmente, Cardioiden, u.s.w.

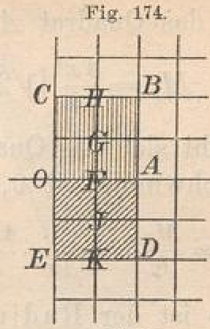
aufeinander, so schneiden die Parabeln der Z-Ebene die X-Achse an den Stellen

$$0,\ \pm a^2,\ \pm 4a^2,\ \pm 9a^2,\ \pm 16a^2,$$

die Y-Achse an den Stellen

$$0,\ \pm 2a^2,\ \pm 8a^2,\ \pm 18a^2,\ \pm 32a^2.$$

Fig. 174.



z-Ebene.

243) **Bemerkung.** Die schraffierte parabolische Fläche hat, wenn $OA = 1$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$, folglich hat das Rechteck $EDBC$ in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $\frac{4}{3}\cdot$ [Probe:

$$\left(\frac{1 \cdot 2^3}{12} + \frac{2 \cdot 1^3}{12}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{2}{12}\right) + \frac{2}{4} = \frac{4}{3}\cdot]$$

Allgemein handelt es sich bei der Parabelfläche durch $\pm a^2$ um den Inhalt $\frac{2}{3}(2a^2)(4a^2) = \frac{16}{3}a^2$, also bei dem Rechteck von der Breite a und der Höhe $2a$ um $\frac{4}{3}a^2 = T_p$.

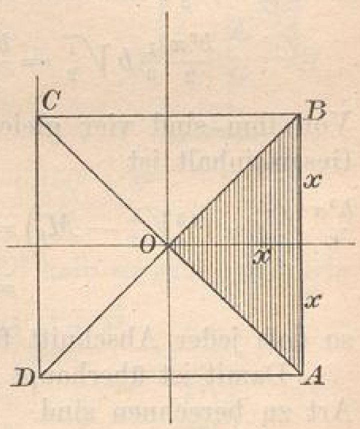
244) Die Parabel hat nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlufsseite, von B bis D die Länge $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = 1{,}1478\,p$. Ist also $OA = a^2$ und $BD = p = 4a^2$, so handelt es sich um die Länge

$$2a^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2}) = 1{,}1478 \cdot 4a^2.$$

Halb so grofs ist das Polarmoment der Geraden von Länge $BD = 2a$ (Fig. 174) im Abstande a von O, also gleich

$$a^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$
$$= 1{,}1478 \cdot 2a^2 = 2{,}2956\,a^2.$$

Fig. 175.



Denkt man sich jetzt die Länge $2a$ und den Abstand veränderlich als $2x$ bezw. x, so hat man im letzten eine Querschnittsformel

$$q_x = x^2[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$

für ein Dreieck OAB in Bezug auf O. (Fig. 175.) Für dieses ganze Dreieck ist also das Polarmoment erster Ordnung nach der Schichtenformel

$$M_p = \frac{x^3}{3}[\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = \frac{1{,}1478 \cdot 2x^3}{3};$$

für das Quadrat $ABCD$ mit Basis $2x$ ist also in Bezug auf O

$$M_p = \frac{4x^3}{3}[\sqrt{2} + \lg(1+\sqrt{2})] = \frac{8x^3}{3} \cdot 1{,}1478 = 3{,}0608\, x^3.$$

Dreht sich das Quadrat in seiner Ebene um O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ϑ, so ist demnach die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F}\vartheta = \frac{1}{4x^2}\cdot\frac{4x^3}{3}[\sqrt{2}+\lg(1+\sqrt{2})]\,\vartheta = \tfrac{2}{3}\cdot 1{,}1478\, x\vartheta = 0{,}7652\, x\vartheta,$$

also ist der Radius der mittleren Geschwindigkeit

$$\varrho_m = 0{,}7652\, x.$$

Dies ist zugleich der mittlere Abstand sämtlicher Punkte der Quadratfläche vom Mittelpunkte.

245) Damit ist zugleich der in Fig. 153 dargestellte Diagrammkörper berechnet. Sein Inhalt ist für $x = \frac{b}{2}$

$$M_p = \frac{4}{3}\,\frac{b^3}{8}[\sqrt{2} + \lg(1+\sqrt{2})] = \frac{1{,}1478\, b^3}{3} = 0{,}3826\, b^3.$$

Der ganze Rechteckskörper hat den Inhalt $b^2 \cdot b\sqrt{\frac{1}{2}} = b^3\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071\, b^3$, der innere, trichterförmige Raum also ist

$$b^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - M_p = 0{,}7071\, b^3 - 0{,}3826\, b^3 = 0{,}3245\, b^3.$$

Der auf der Spitze stehende Kegel hat die Höhe $b\sqrt{\frac{1}{2}}$ und den Radius $b\sqrt{\frac{1}{2}}$, also den Inhalt

$$\frac{b^2\pi}{2}\,\frac{1}{3}\,b\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{b^3\pi}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071\, b^3\,\frac{\pi}{6} = 0{,}3702\, b^3.$$

Von ihm sind vier gleiche hyperbolische Teile abgeschnitten, deren Gesamtinhalt ist

$$\frac{b^3\pi}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \left(b^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - M_p\right) = b^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[\frac{\pi}{6} - 1\right] + M_p = b^3(0{,}3702 - 0{,}3245)$$
$$= 0{,}0457\, b^3,$$

so dafs jeder Abschnitt für sich den Inhalt $0{,}0139\, b^3$ hat.

Damit ist überhaupt gezeigt, wie hyperbolische Abschnitte solcher Art zu berechnen sind.

246) **Aufgabe.** Das Polarmoment erster Ordnung für das Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$ zu bestimmen.

Den Geraden HB und CB der z-Ebene entsprechen nach Nr. 242 Parabeln von den Gleichungen

$$\sqrt{X^2 + Y^2} + X = 2a^2$$

und

$$\sqrt{X^2 + Y^2} - X = 2b^2,$$

aus denen durch Subtraktion folgt

$$2X = 2a^2 - 2b^2$$

oder

$$X = a^2 - b^2,$$

durch Addition dagegen

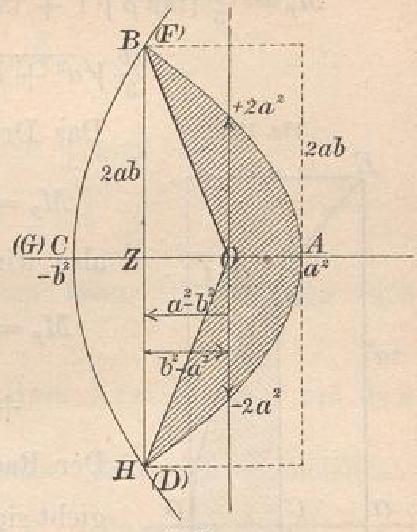
$$2\sqrt{X^2 + Y^2} = 2(a^2 + b^2)$$

oder

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = a^2 + b^2,$$

so dafs

Fig. 176.



$$Y = \sqrt{R^2 - X^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - a^2 - b^2)^2} = \sqrt{4a^2b^2} = \pm 2ab.$$

Nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlufsseite, ist die Parabellänge $\widehat{AB}$ für gegebenes Y

$$\widehat{s} = \frac{1}{2}\left[\frac{Y}{p}\sqrt{p^2 + Y^2} + p\,{}^e\lg\frac{Y + \sqrt{p^2 + Y^2}}{p}\right],$$

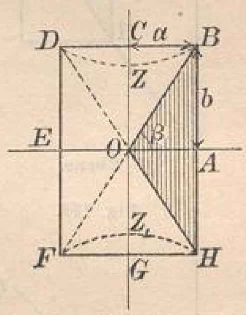
also für $p = 2a^2$ und $Y = 2ab$ der ganze Bogen

$$\widehat{HB} = \frac{2ab}{2a^2}\sqrt{4a^4 + 4ab^2}$$

$$+ 2a^2\,{}^e\lg\frac{2ab + \sqrt{4a^4 + 4a^2b^2}}{2a^2}$$

oder

Fig. 177.



$$\widehat{HB} = 2b\sqrt{a^2 + b^2} + 2a^2\,{}^e\lg\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Demnach ist das Polarmoment der Geraden HB halb so grofs, nämlich

$$M_p = b\sqrt{a^2 + b^2} + a^2\,{}^e\lg\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$= a^2\left[\frac{b}{a}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + {}^e\lg\left(\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\right)\right]$$

oder

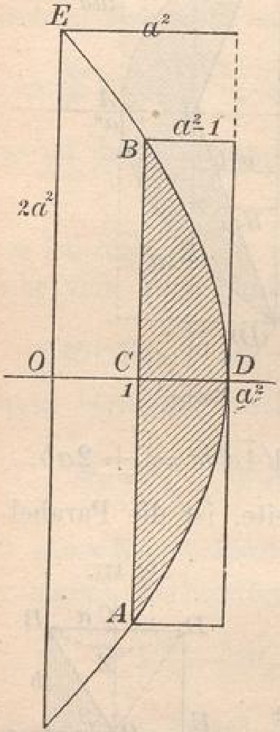
$$M_p = a^2\left[\tan\beta\sqrt{1 + \tan^2\beta} + {}^e\lg\left(\tan\beta + \sqrt{1 + \tan^2\beta}\right)\right].$$

Setzt man nun a veränderlich gleich x, so folgt für das Dreieck OBH in Fig. 177 nach der Schichtenformel

$$M_p = \frac{a^3}{3}\left[\tan\beta\sqrt{1+\tan^2\beta} + {}^e\lg\left(\tan\beta + \sqrt{1+\tan^2\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{ab}{3}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^3}{3}\lg\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Fig. 178.



Z-Ebene.

Das Dreieck OBD giebt entsprechend

$$M_p = \frac{ab}{3}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{b^3}{3}\lg\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b},$$

also wird für das gesamte Rechteck $HBDF$

$$M_p = \frac{4ab}{3}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{2a^3}{3}\lg\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

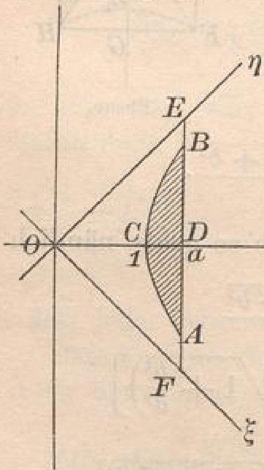
$$+ \frac{2b^3}{3}\lg\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit ergiebt sich aus $\frac{M_p}{F} = \frac{M_p}{4ab}$. Auch die betreffenden Kegelabschnitte sind leicht zu berechnen.

247) **Bemerkung.** Die Parabelfläche ABH in Fig. 176 hat, da $ZO = b^2 - a^2$, also $ZA = b^2$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3}\,4ab\cdot b^2 = \frac{8}{3}ab^3$. Der vierte Teil davon, $\frac{2}{3}ab^3$, ist das polare Trägheitsmoment der hyperbolisch begrenzten Fläche Z_1HBZ der z-Ebene, für die $OZ = \sqrt{b^2 - a^2}$ ist. Die Gleichung der Hyperbel in Fig. 177 ist also

$$y^2 - x^2 = b^2 - a^2.$$

Fig. 179.



z-Ebene.

248) **Aufgabe.** Das polare Trägheitsmoment des Segments der gleichseitigen Hyperbel in Fig. 179 zu berechnen.

Reicht das Hyperbelsegment von 1 bis a, so entspricht ihm in der Z-Ebene (Fig. 178) ein Parabelsegment, von 1 bis a^2 reichend. Aus

$$(a^2 - 1) : a^2 = Y^2 : 4a^4$$

oder

$$Y : 2a^2 = \sqrt{a^2-1} : a$$

folgt

$$Y = 2a\sqrt{a^2-1},$$

das Parabelsegment wird also

$$F = \frac{2}{3}\cdot 4a\sqrt{a^2-1}\cdot(a^2-1) = \frac{8a\,(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Demnach ist das polare Trägheitsmoment der Hyperbelfläche

$$T_p = \frac{2a(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

In Bezug auf die Gleichheitsachsen ξ und η wird

$$T_\xi = T_\eta = \frac{a}{3}(a^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nach Nr. 178 $M_{\xi\eta}$ berechnet werden kann, so läfst sich auch T_x und T_y bestimmen.

249) **Aufgabe.** Was entspricht dem Kreise $r = c$ um den Punkt a der z-Ebene?

Auflösung. Die Gleichung des Kreises läfst sich schreiben als

$$(x-a)^2 + y^2 = c^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = c^2.$$

Dies geht über in

$$\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2} + \frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2} - 2a\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} + a^2 = c^2$$

oder in

$$\sqrt{X^2+Y^2} - 2a\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} + a^2 = c^2,$$

oder auch

$$R - 2a\sqrt{\frac{R + R\cos\Phi}{2}} + a^2 = c^2$$

oder

1) $$R - 2a\sqrt{R}\cdot\cos\frac{\Phi}{2} + a^2 = c^2.$$

Ist dabei $a = c$, so entsteht die einfachere Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 2a^2\left(\sqrt{X^2+Y^2} + X\right)$$

oder

$$R^2 = 2a^2(R + R\cos\Phi)$$

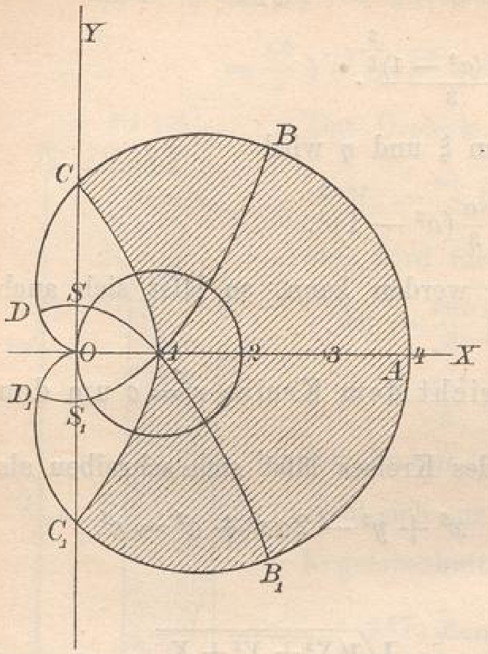
oder

2) $$R = 4a^2\frac{1+\cos\Phi}{2} = 4a^2\cos^2\frac{\Phi}{2}.$$

Dies ist die Gleichung der Cardioide, die allgemeineren Kurven 1) mögen daher als cardioidische Kurven bezeichnet werden. Sie kommen später noch einmal als cyklische Kurven zum Vorschein.

250) **Aufgabe.** Den Inhalt der Cardioide zu berechnen, deren Grundkreis den Radius 1 hat.

Fig. 180.



Auflösung. Der entsprechende Kreis der z-Ebene hat in Bezug auf O das Trägheitsmoment

$$T_p = \tfrac{3}{2} r^4 \pi = \frac{3\pi}{2},$$

folglich ist der Inhalt der Cardioide das Vierfache davon, d. h.

$$F = 6\pi.$$

251) **Aufgabe.** Wie grofs ist die Fläche zwischen dieser Cardioide und der symmetrisch teilenden Parabel?

Auflösung. Der schraffierte Halbkreis hat für O das Trägheitsmoment

$$r^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right) + \left(r + \frac{4r}{3\pi}\right)^2 \frac{r^2\pi}{2},$$

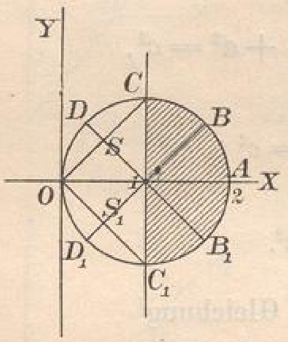
also für $r = 1$

$$T_p = \frac{3\pi}{4} + \tfrac{4}{3},$$

folglich ist die gesuchte Fläche

$$F = 3\pi + \tfrac{16}{3}.$$

Fig. 181.



Der Rest ist

$$6\pi - \left(3\pi + \tfrac{16}{3}\right) = 3\pi - \tfrac{16}{3}.$$

So kann man jeden der entsprechenden parabolischen Sektoren der Cardioide berechnen.

[Setzt man den Umfang der Cardioide, $16r$, also hier 16, als bekannt voraus, so folgt das Polarmoment erster Ordnung der Kreislinie vom Radius $r = 1$ in Bezug auf seinen Randpunkt O als $\frac{16}{2} = 8$; allgemein als $\frac{16\sqrt{r}^2}{2} = 8r$ für den Kreis vom Radius $\sqrt{r}$, also $8\varrho^2$ für den Kreis mit Radius ϱ.]

Weiteres über diese Kurven siehe in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften". Noch sei bemerkt, dafs man auch bei Spiralensektoren der Lemniskaten die Trägheitsmomente sofort hinschreiben kann, ebenso die Polarmomente erster Ordnung für die Bogen der lemniskatischen Spiralen, wozu man nur die logarithmischen Spiralen der Kreisschar vergleiche.

252) **Aufgabe.** Symmetrische Brennstrahlsektoren der Parabel zu berechnen.

Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf O ist

$$\frac{ba}{48}(12a^2+b^2)=\frac{a\cdot 2a\tan\frac{\alpha}{2}}{48}\left[12a^2+4a^2\tan^2\frac{\alpha}{2}\right]=\frac{a^4\tan\frac{\alpha}{2}}{6}\left[3+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

Folglich ist die entsprechende Fläche der Parabel das Vierfache, nämlich

$$\frac{2}{3}a^4\tan\frac{\alpha}{2}\left[3+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

(Probe: für $\alpha = 90^0$ entsteht $\frac{8}{3}a^4$, d. h. $\frac{2}{3}$ des Rechtecks $ABCD$, wo $OA = a^2$, $OD = 2a^2$ ist.)

Fig. 182.

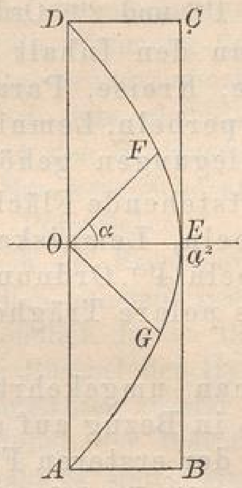
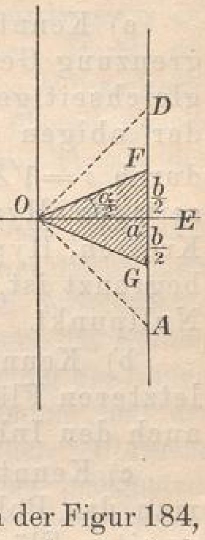
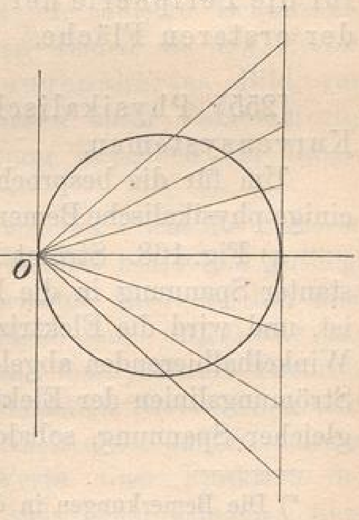


Fig. 183.



253) **Bemerkung.** Vergleicht man die Gleichungen der Lemniskate und der gleichseitigen Hyperbel in Polarkoordinaten, so erkennt man, dafs die Lemniskate die reciproke Kurve der gleichseitigen Hyperbel ist. Die Transformation der Figur 184, in der Kreis und Gerade AB von O aus gerechnet reciprok sind, mittels der Funktion $Z=\sqrt{z}$, giebt den Beweis dafür, denn dabei verwandeln sich Kreis und Tangente in Lemniskate bezw. Hyperbel.

Fig. 184.



Transformiert man dieselbe Figur mittels $Z = z^2$, so gehen Kreis und Tangente in Cardioide und Parabel über, und so folgt, dafs die Cardioide reciproke Kurve der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt ist.

Weil das Inversionsbild eines Kreises stets ein Kreis ist, so ist das Inversionsbild jeder Cassinischen Linie vom Mittelpunkt aus stets eine Cassinische Linie, das einer cardioidischen Kurve in Bezug auf O stets eine cardioidische Kurve. Dem Sonderfalle der Geraden entsprechen die Sonderfälle der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel.