



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Hyperbel und Lemniskate als reciproke Kurven.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

252) **Aufgabe.** Symmetrische Brennstrahlsektoren der Parabel zu berechnen.

Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf  $O$  ist

$$\frac{ba}{48} (12a^2 + b^2) = \frac{a \cdot 2a \tan \frac{\alpha}{2}}{48} \left[ 12a^2 + 4a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{a^4 \tan \frac{\alpha}{2}}{6} \left[ 3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

Folglich ist die entsprechende Fläche der Parabel das Vierfache, nämlich

$$\frac{2}{3} a^4 \tan \frac{\alpha}{2} \left[ 3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

(Probe: für  $\alpha = 90^\circ$  entsteht  $\frac{8}{3} a^4$ , d. h.  $\frac{2}{3}$  des Rechtecks  $ABCD$ , wo  $OA = a^2$ ,  $OD = 2a^2$  ist.)

253) **Bemerkung.** Vergleicht man die Gleichungen der Lemniskate und der gleichseitigen Hyperbel in Polarkoordinaten, so erkennt man, daß die Lemniskate die reciproke Kurve der gleichseitigen Hyperbel ist. Die Transformation der Figur 184, in der Kreis und Gerade  $AB$  von  $O$  aus gerechnet reciprok sind, mittels der Funktion  $Z = \sqrt{z}$ , giebt den Beweis dafür, denn dabei verwandeln sich Kreis und Tangente in Lemniskate bzw. Hyperbel.

Transformiert man dieselbe Figur mittels  $Z = z^2$ , so gehen Kreis und Tangente in Cardioide und Parabel über, und so folgt, daß die Cardioide reciproke Kurve der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt ist.

Weil das Inversionsbild eines Kreises stets ein Kreis ist, so ist das Inversionsbild jeder Cassinischen Linie vom Mittelpunkt aus stets eine Cassinische Linie, das einer cardioidischen Kurve in Bezug auf  $O$  stets eine cardioidische Kurve. Dem Sonderfalle der Geraden entsprechen die Sonderfälle der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel.

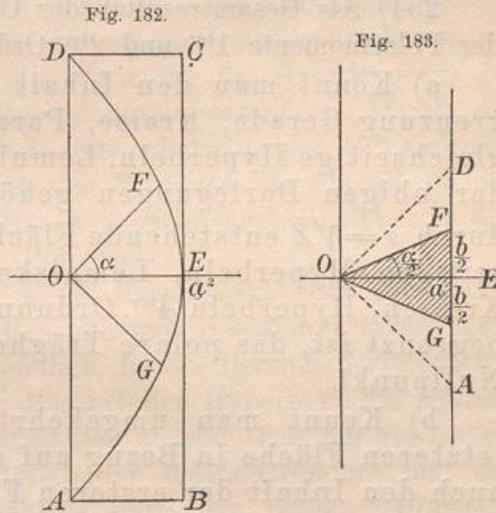


Fig. 184.

